

*С.И. КАРАТУШИН, И.Н. ТИТУХ*

**ТОНКОСТЕННЫЕ  
СТЕРЖНИ**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Балтийский государственный технический университет «Военмех»  
Кафедра механики деформируемого твердого тела

*С.И. КАРАТУШИН, И.Н. ТИТУХ*

# ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2020

УДК 539.38(075.8)  
К21

**Каратушин, С.И.**

**К21** Тонкостенные стержни: учебное пособие /С.И. Каратушин, И.Н. Титух; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2020. – 56 с.  
ISBN 978-5-907324-10-7

Рассмотрена специфика изгиба и кручения тонкостенных стержней открытого профиля, являющихся подкрепляющими или несущими элементами различных машиностроительных конструкций, широко применяемых, в авиа- и ракетостроении. Подробно описаны особенности кручения и поперечного изгиба тонкостенных стержней: деформация сечения, распределение нормальных напряжений и потоков касательных сил. Раскрыты понятия секториальных геометрических характеристик, приведены соотношения, определяющие геометрическое положение центра кручения и изгиба сечения, примеры решения практических задач.

Предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по программам подготовки бакалавров и магистров по направлению «Прикладная механика»

**УДК 539.38(075.8)**

Рецензент канд. техн. наук, доц. каф. «Космические аппараты и двигатели» БГТУ *Л.И. Калягин*

*Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета*

**ISBN 978-5-907324-10-7**

© БГТУ, 2020  
© Авторы, 2020

## 1. Тонкостенные стержни открытого и замкнутого профиля

В настоящее время в машиностроении, авиации, строительстве, железнодорожном транспорте все больше используются конструкции, выполненные из тонкостенных и штампованных профилей или просто из тонколистовой стали. При сравнительно небольшой массе они обеспечивают высокую жесткость и прочность и, следовательно, экономичность.

При расчётах на прочность к схеме тонкостенных стержней сводятся подкрепляющие элементы оболочек самолётов и ракет: стрингеры, шпангоуты (рис. 1,*а*), составляющие элементы автомобильных рам, тележек железнодорожных вагонов, в строительной индустрии – стрелы подъемных кранов и многие другие силовые конструкции.

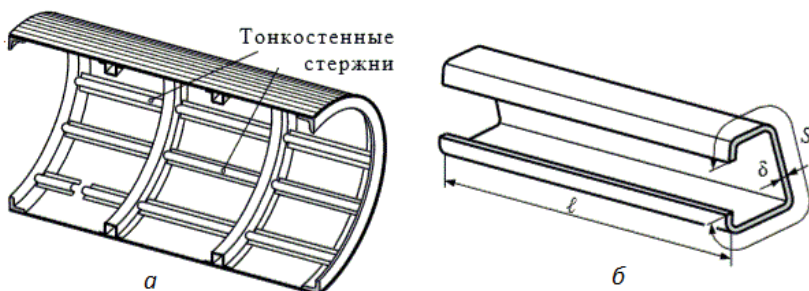


Рис. 1

Основным признаком тонкостенного стержня является характерное соотношение его геометрических размеров. В поперечном сечении одно из измерений (толщина  $\delta$ ) существенно меньше другого – срединной длины контура  $s$ . Последняя в свою очередь намного меньше, чем длина стержня  $l$  (рис. 1,*б*). К ним относятся гнутые, тянутые, прокатные и прессованные профили, сварные балки.

Тонкостенные профили подразделяются на открытые (рис. 2,*а*) и замкнутые (рис. 2,*б*). Главная особенность деформации тонкостенных

стержней открытого профиля, работающих при поперечном изгибе, – возможность появления крутящего момента. По этой причине возникает свободное или стеснённое кручение и, как следствие, депланация (выход точек сечения из первоначальной плоскости сечения). В тонкостенных стержнях замкнутого профиля депланация существенно меньше, и для них можно использовать обычную теорию изгиба и кручения стержней. Явления, возникающие в стержнях открытого профиля, не могут быть учтены обычными моделями изгиба и кручения стержней.

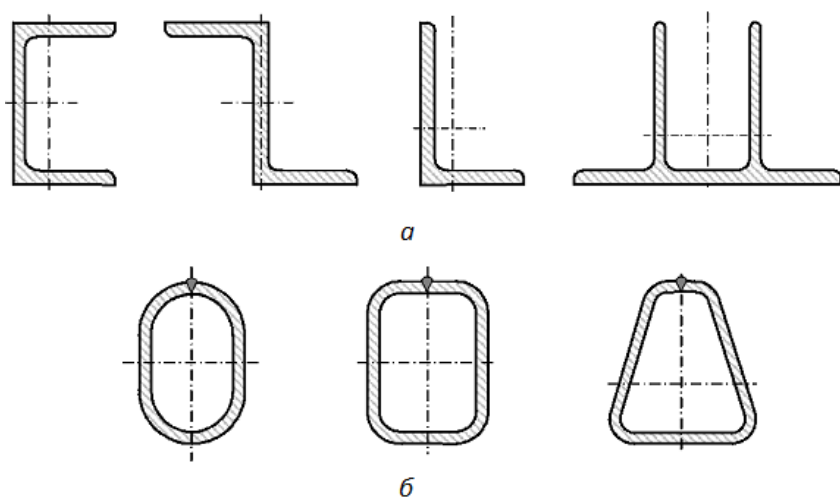


Рис. 2

Специфика расчета этих конструкций на прочность требует особой расчетной схемы – схемы тонкостенного стержня. На рис. 3 показано деформирование при кручении стержней сплошного поперечного сечения, тонкостенного замкнутого и открытого профиля.

Основные положения теории тонкостенных стержней были сформулированы С.П. Тимошенко. Полное и общее развитие эта теория получила в трудах В.З. Власова и потому обычно называется теорией Власова.

Тонкостенный стержень как расчетная схема сохраняет основные свойства обыкновенного стержня, и формулы сопротивления материалов, связанные с растяжением (сжатием), изгибом и кручением бруса, остаются в основном справедливыми.

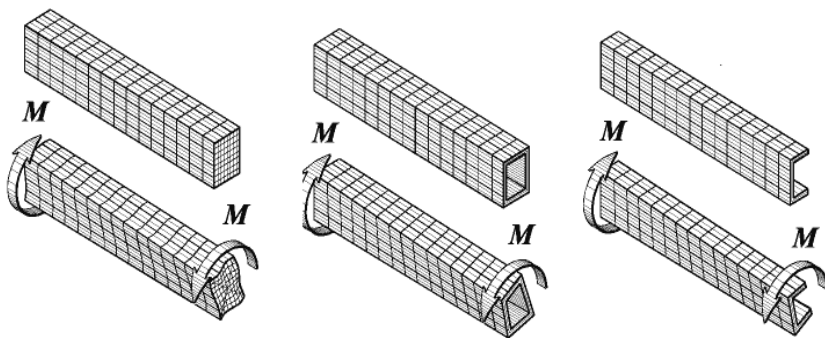


Рис. 3

Вместе с тем тонкостенный стержень, в силу геометрических соотношений, обнаруживает свойства, существенно отличающие его от стержней сплошного сечения. При некоторых видах нагружения не соблюдается гипотеза плоских сечений, происходит так называемая деplanation сечения за счет неравномерной деформации стержня вдоль его оси. Иными словами, не соблюдается принцип Сен-Венана, т.е. глубина «проникновения» краевых особенностей вдоль оси существенно больше, чем в сплошном стержне.

Сравнительная оценка нормальных и касательных напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  в поперечных сечениях бруса при переходе от сплошного сечения к тонкостенному разомкнутому профилю существенно меняется, что требует особого изучения.

При кручении тонкостенных стержней и вообще стержней с некруглым поперечным сплошным сечением поперечные сечения, плоские до деформации, искривляются по некоторой поверхности  $w(x,y,z)$  (рис. 4), что называется деplanation сечения. По характеру формирования деplanation сечения по длине стержня следует различать два типа кручения стержней: свободное и стесненное.

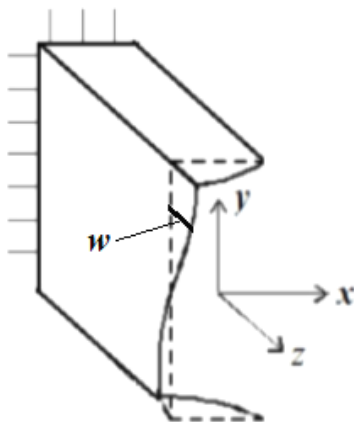


Рис. 4

Если деplanation во всех поперечных сечениях одинакова по длине стержня или, иначе,  $w(x,y,z) = w(x,y)$ , т.е. является постоянной и не зависит от  $z$ , то такое кручение называ-

ется свободным, при переменных деформациях по длине стержня – стесненным. При свободном кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения, а при стесненном, наряду с касательными, возникают и нормальные напряжения. Эффект от неравномерной деформации сечения по его длине наиболее существен для стержней открытого профиля.

Порядок вычисления напряжений и перемещений в тонкостенном стержне закрытого профиля при свободном кручении принципиально ничем не отличается от метода расчета обычных стержней.

Отношение  $\chi = \frac{j_{\min}}{j_K}$  ( $j_{\min}$  – минимальный момент инерции поперечного сечения при изгибе),  $j_K$  – момент инерции поперечного сечения при кручении) определяет необходимость учитывать влияние дополнительных, не рассматриваемых в курсе сопротивления материалов, эффектов. При  $\chi \leq 3$  допустимо использовать обычные соотношения изгиба и кручения стержней, при  $\chi > 3$  – недопустимо.

Для приведенных на рис. 5 профилей  $J_{\min} = \frac{2}{3}a^3\delta$ ,  
 $J_K = \frac{4(a-\delta)^4\delta}{4(a-\delta)} \approx a^3\delta, \chi = \frac{2}{3}$  – для замкнутого профиля,  
 $J_K \approx \frac{1}{3}\delta^3 \cdot 4a = \frac{4}{3}a\delta^3, \chi = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2$  – для открытого профиля. При  $a \geq 5\delta$   $\chi > 12$ .

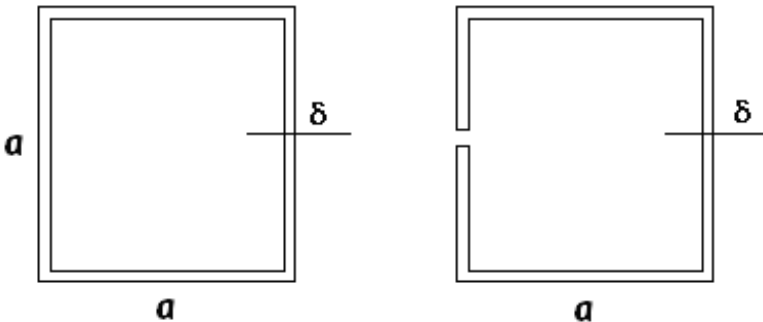


Рис. 5

## 2. Секториальная площадь поперечного сечения

В дополнение к уже известным геометрическим характеристикам поперечного сечения ( $F$  – площадь;  $S_x, S_y$  – статические моменты;  $J_x, J_y, J_{xy}$  – осевые и центробежный моменты инерции) вводятся новые. Эти характеристики свойственны только тонкостенным стержням и определяются на основе понятия секториальной площади поперечного сечения.

Рассмотрим срединную линию контура поперечного сечения (рис. 6). Срединная линия – это геометрическое место точек поперечного сечения, равноудаленно расположенных от контурных линий. Выберем на срединной линии начало отсчета дуги  $s$  – точку  $O$  и зададим полюс  $P$ . Проведем два луча к концам элементарного отрезка  $ds$ . Удвоенную площадь треугольника  $PAB$  обозначают через  $d\omega$ . Очевидно, что  $d\omega = \rho ds$ , где  $\rho$  – расстояние от полюса  $P$  до касательной к линии контура в точке  $A$ .

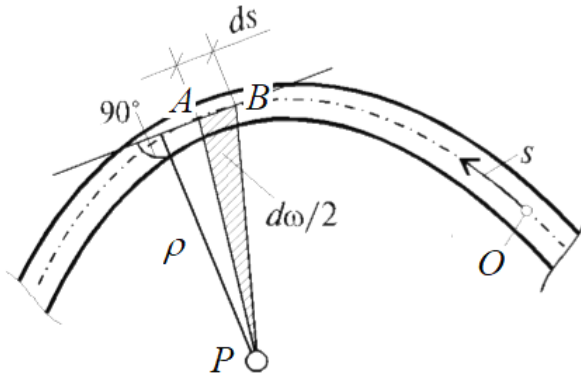


Рис. 6

Интеграл  $\omega = \int_0^s \rho ds$  называется секториальной площадью поперечного сечения, которая представляет собой удвоенную площадь, очерчиваемую радиусом-вектором  $PB$  при движении точки  $B$  по контуру от начала отсчета  $O$  до некоторого значения дуги  $s$ . Если радиус-вектор вращается по часовой стрелке, приращение площади  $d\omega$  имеет знак «минус», если против часовой стрелки – «плюс». Точка  $P$  называется секториальным полюсом. При заданном полюсе и задан-



ном начале отсчета в каждом конкретном случае может быть построена эпюра секториальной площади.

В качестве примера построим эпюру секториальной площади для контура, приведенного на рис. 7,а. Выбираем в качестве полюса точку  $P$ , а за начало отсчета принимаем точку  $O$ .

На участке  $0-3$  вектор  $\rho$  вращается по часовой стрелке, следовательно, эпюра  $\omega$  имеет знак «минус»:  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_3 = 0 - a^2 = -a^2$ . На участке  $3-4$  вектор вращается против часовой стрелки, т.е. приращение площади будет положительным:  $\omega_4 = -a^2 + a^2 = 0$ . Аналогично ищутся  $\omega_1, \omega_2$ . Эпюра секториальной площади  $\omega$  приведена на рис. 7,б. Очевидно, что значение секториальной площади зависит от выбора начала отсчета и полюса.

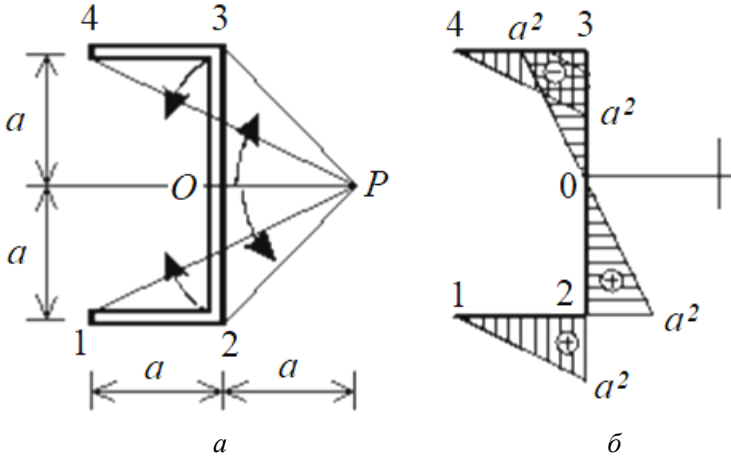


Рис. 7

### 3. Другие секториальные характеристики и их определение

Кроме секториальной площади для тонкостенных стержней вводятся дополнительные секториальные характеристики поперечных сечений. Исходя из предположения, что толщина тонкостенного сечения по всему контуру постоянна и равна  $\delta$ , можно записать следующее.

Секториальный статический момент поперечного сечения:

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = \delta \int_S \omega ds.$$

Размерность секториального статического момента – длина в четвертой степени.

Секториальные линейные моменты площади поперечного сечения относительно осей  $x, y$  :

$$S_{\omega x} = \int_F \omega y dF = \delta \int_S \omega y ds, \quad S_{\omega y} = \int_F \omega x dF = \delta \int_S \omega x ds.$$

Размерность этих секториальных характеристик – длина в пятой степени.

При кручении и поперечном изгибе стержней в поперечных сечениях возникают касательные напряжения. Для тонкостенных стержней точка, относительно которой момент от этих касательных напряжений равен нулю, может не совпадать с центром тяжести поперечного сечения, но она всегда существует.

При стесненном кручении эта точка называется центром кручения, при поперечном изгибе – центром изгиба. Далее будет доказано, что центры кручения и изгиба совпадают. Для сечений, имеющих две оси симметрии, центр изгиба или центр кручения совпадает с центром тяжести.

Положение центра изгиба (или кручения) не зависит от действующих на стержень сил, а зависит только от формы и размеров поперечного сечения тонкостенного стержня. При стесненном кручении положение центра кручения и начала отсчета секториальной площади однозначно определено. Эти точки должны быть выбраны так, чтобы секториальные линейные моменты, а также секториальный статический момент были равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned} S_{\omega x} &= \int_F \omega y dF = \delta \int_S \omega y ds = 0, \\ S_{\omega y} &= \int_F \omega x dF = \delta \int_S \omega x ds = 0, \\ S_{\omega} &= \int_F \omega dF = \delta \left( \int_S \omega ds + DF \right) = 0. \end{aligned}$$

Выполнение первых двух условий зависит только от выбора координат полюса. Выполнение же третьего условия зависит от выбора начала отсчета при вычислении секториальной площади.

Эпюра  $\omega$ , построенная при полюсе, в качестве которого взят центр кручения, и удовлетворяющая третьему условию, носит название эпюры главной секториальной площади  $\omega_0$ .

Последовательность определения положения центра кручения и секториальных характеристик сечения:

1. Выбирают положение полюса  $P$  и строят эпюру секториальной площади относительно выбранного полюса  $\omega$ .

2. Определяют величины  $S_{\omega x}$  и  $S_{\omega y}$  относительно полюса  $P$  и вычисляют координаты центра кручения по формулам  $x_C = \frac{S_{\omega x}}{J_x}$ ,

$$y_C = -\frac{S_{\omega y}}{J_y} \quad (\text{при направлении осей } x - \text{вправо, } y - \text{вверх}).$$

3. Определяют секториальную площадь относительно центра кручения и вычисляют секториальный статический момент поперечного сечения.

4. Определяют постоянную  $D$  по формуле  $D = -\frac{S_{\omega}}{F\delta}$  и строят эпюру главной секториальной площади:  $\omega_0 = \omega + D$ .

#### 4. Свободное кручение тонкостенных стержней

При свободном (чистом) кручении (рис. 8) отсутствуют ограничения осевых перемещений и при деформации поперечных сечений не возникают нормальные напряжения. Справедливы соотношения сопротивления материалов.

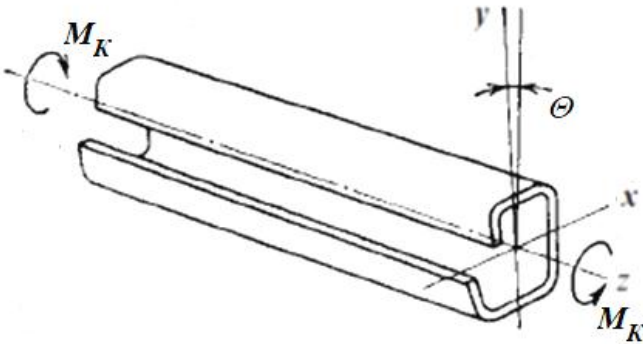


Рис. 8

На участке стержня длиной  $dz$   $M_{\epsilon} = C \frac{d\theta}{dz}$ . При постоянных по длине стержня геометрических параметрах и механических свойствах

$C = GJ_{\hat{e}}$ , где  $G$  – модуль сдвига материала. Распределение касательных напряжений линейное по толщине профиля (рис. 9). Максимальные касательные напряжения в крайних точках (наиболее удаленных от средней линии):  $\tau_{\max} = \frac{M_{\hat{e}} \delta}{J_{\hat{e}}}$ .

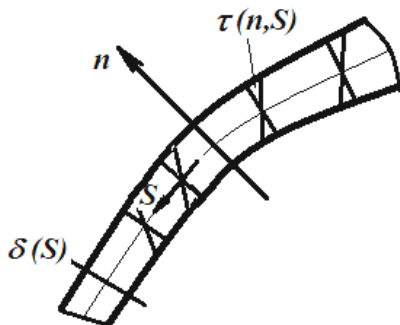


Рис. 9

Напряжения в поперечных сечениях открытого профиля практически не изменятся, если профиль сечения распрямить. Иначе говоря, напряжения в криволинейном открытом профиле будут примерно такими же, как и в прямом.

Если тонкостенный незамкнутый профиль является составным (рис. 10) и не может быть развернут в вытянутый прямоугольник, воспользовавшись почленной аналогией, можно определить напряжения на  $i$ -м произвольном участке:

$$\tau_{\max}(i) = \frac{M_{\hat{e}i} \delta_i}{J_{\hat{e}i}}, \quad (1)$$

где  $M_{ki}$  – доля крутящего момента, соответствующего  $i$ -му участку:

$$M_{\hat{e}i} = \frac{\theta G J_{\hat{e}i}}{l}, \quad (2)$$

где  $\theta$  – угловое перемещение, единое для всех участков:

$$\theta = \frac{M_{\hat{e}} l}{G \sum_{i=1}^n J_{\hat{e}i}}. \quad (3)$$

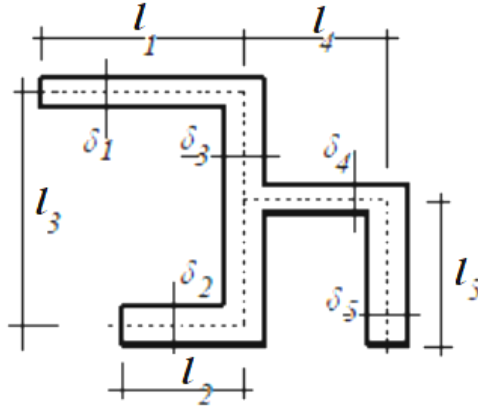


Рис. 10

Изложенный подход является приближенным, так как он не позволяет определить напряжения в зонах сопряжения элементов поперечного сечения профиля – зонах концентрации напряжений.

### 5. Стесненное кручение тонкостенных стержней

Используются технические (приближенные) гипотезы: каждое сечение проворачивается как жесткое целое относительно некой точки – центра поворота (кручения); в срединной поверхности стержня отсутствуют сдвиговые деформации.

Смещение точки  $A$  (рис. 11) по продольной оси  $z-w$ , в плоскости контура  $S-u$ .

Если  $P$  – центр кручения (см. рис. 6), то  $u = \rho\theta(z)$ . Согласно соотношениям Коши  $\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s}$ . Согласно второй гипотезе

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial z} = -\rho \frac{d\theta(z)}{dz}, \quad (4)$$

откуда  $w = -\frac{d\theta(z)}{dz} \int_0^s \rho ds + w_A = -\frac{d\theta(z)}{dz} \omega + w_A$ . Здесь  $w_A$  – осевое смещение в точке  $A$  (начале дуги).

$$\text{Депланация сечения } w - w_A = -\frac{d\theta(z)}{dz} \omega.$$

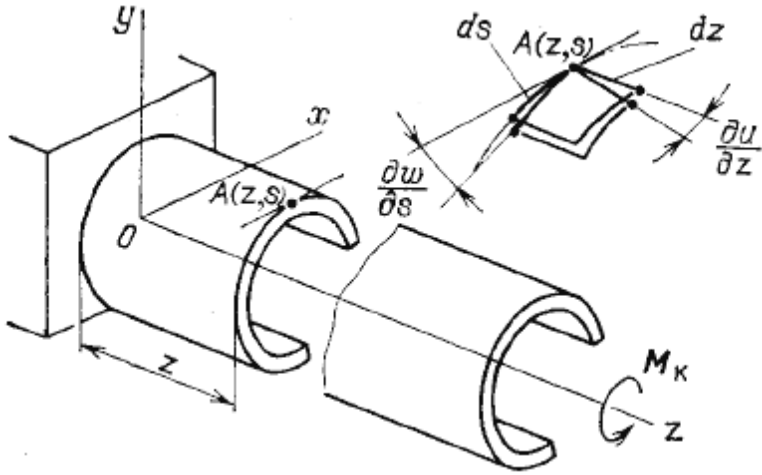


Рис. 11

**Нормальные напряжения.** Линейные осевые деформации

$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} \omega + \varepsilon_A. \quad (5)$$

При отсутствии нормальных напряжений в поперечных к продольной оси направлениях

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} E\omega + E\varepsilon_A = 0. \quad (6)$$

Так как при стесненном кручении в качестве внешних сил выступают только крутящие моменты, то в каждом поперечном сечении суммарные продольная сила и изгибающие моменты равны нулю:

$$\begin{cases} M_X = \int_F \sigma y dF = 0 \\ M_Y = \int_F \sigma x dF = 0 \\ N_Z = \int_F \sigma dF = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_F \left(-\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} E\omega + E\varepsilon_A\right) y dF = 0, \\ \int_F \left(-\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} E\omega + E\varepsilon_A\right) x dF = 0, \\ \int_F \left(-\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} E\omega + E\varepsilon_A\right) dF = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что оси  $X, Y$  главные,  $\int_F y dF = 0, \int_F x dF = 0$ , получим

$$\begin{cases} S_{\omega x} = \int_F E \omega y dF = \delta E \int_S \omega y ds = 0, \\ S_{\omega y} = \int_F E \omega x dF = \delta E \int_S \omega x ds = 0, \\ \frac{d^2 \theta(z)}{\partial z^2} \int_F E \omega dF = \int_F E \varepsilon_A dF. \end{cases}$$

Из последнего уравнения с учетом постоянного в поперечном сечении модуля упругости материала  $\varepsilon_A = \frac{d^2 \theta(z)}{\partial z^2} \frac{\int_F \omega dF}{\int_F dF}$ . Подобрав начало отсчета (точку  $A$ ) так, чтобы  $\int_F \omega dF = 0$ , получим требуемое тождество и линейную связь между распределениями нормальных напряжений и секториальной площадью в поперечном сечении при стесненном кручении:

$$\sigma = - \frac{d^2 \theta(z)}{\partial z^2} E \omega.$$

**Касательные напряжения.** Внешний крутящий момент  $M_k$  приводит к появлению внутренних моментов свободного ( $M_0$ ) и стесненного ( $M_\omega$ ) кручения.  $M_0 = GJ_\varepsilon \frac{d\theta}{dz}$ .

Условия равновесия элемента стержня (при отсутствии нагрузок на боковой поверхности) показаны на рис. 12, а, возникновение крутящего момента стесненного кручения  $M_\omega$  – на рис. 12, б:

$$\tau(s) \delta(s) = \frac{\partial N_f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int \sigma dF,$$

$$\tau(s) = - \frac{d^3 \theta}{dz^3} \frac{1}{\delta(s)} \int_f E \omega dF = - \frac{d^3 \theta}{dz^3} \frac{1}{\delta(s)} S_{E\omega} = - \frac{d^3 \theta}{dz^3} \frac{E}{\delta(s)} S_\omega,$$

$S_{E\omega} = \int_f E \omega dF$  – приведенный секториальный момент отсеченной части сечения;  $S_\omega = \int_f \omega dF$  – секториальный момент отсеченной части сечения.

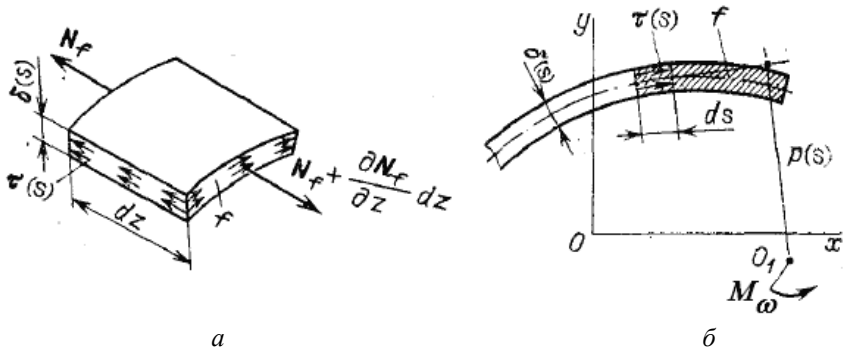


Рис. 12

Крутящий момент касательных напряжений стесненного кручения (рис. 12,б):

$$M_{\omega} = - \int_F \tau(s) \delta(s) \rho(s) ds = - \int_F \tau(s) \delta(s) d\omega = \frac{d^3 \theta}{dz^3} \int_F (\int F E \omega dF) d\omega. \quad (7)$$

Интегрируем по частям:

$$\int_F (\int F E \omega dF) d\omega = \omega \int_F E \omega dF \Big|_0^F - \int_0^F E \omega^2 dF = - \int_F E \omega^2 dF = -B_{\omega},$$

где  $B_{\omega}$  – секториальная жесткость сечения, при постоянном модуле упругости  $B_{\omega} = EJ_{\omega}$ ;  $J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF$  – секториальный момент инерции поперечного сечения.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } M_{\omega} &= - \frac{d^3 \theta}{dz^3} B_{\omega} = - \frac{d^3 \theta}{dz^3} EJ_{\omega}; \\ & - \frac{d^3 \theta}{dz^3} E = \frac{M_{\omega}}{J_{\omega}}. \end{aligned}$$

Касательные напряжения стесненного кручения:

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} S}{J_{\omega} \delta}. \quad (8)$$



## 6. Дифференциальное уравнение стесненного кручения тонкостенных стержней

Внешний крутящий момент  $M_K$  уравнивается суммой внутренних моментов чистого (свободного) ( $M_0$ ) и стесненного ( $M_\omega$ ) кручения:  $M_K = M_0 + M_\omega$ .

$$GJ_\epsilon \frac{d\theta}{dz} - EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3} = \dot{I}_\epsilon(z), \quad (9)$$

$$\dot{I}_\epsilon(z) = \dot{I}_\epsilon + \int_0^l \dot{I}_\epsilon(z) dz, \quad m_\epsilon(z) = -\frac{d\dot{I}_\epsilon}{dz}.$$

На рис. 13  $z_K$  – ось, проходящая через центр кручения (поворота) сечений.

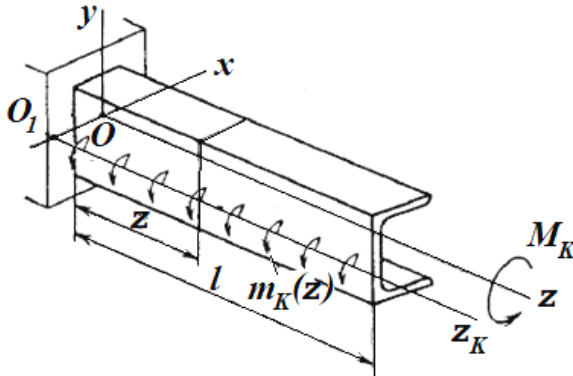


Рис. 13

После дифференцирования

$$-\frac{d}{dz} \left( GJ_\epsilon \frac{d\theta}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left( EJ_\omega \frac{d^3\theta}{dz^3} \right) = m_\epsilon(z)$$

или

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} - \beta^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{m_\epsilon(z)}{EJ_\omega}, \quad (10)$$

где  $\beta^2 = \frac{GJ_\epsilon}{EJ_\omega}$ .

Частное решение неоднородного уравнения:  $\theta^* = ce^{\lambda z}$ . Характеристическое уравнение для однородного уравнения:  $\lambda^4 - \beta^2 \lambda^2 = 0$ . Корни  $\lambda = 0 \pm \beta$ .

Полное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$\theta = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{ch} \beta z + C_4 \operatorname{sh} \beta z + \theta^*,$$

$$\operatorname{sh} \beta z = 0,5(e^{\beta z} - e^{-\beta z}), \quad \operatorname{ch} \beta z = 0,5(e^{\beta z} + e^{-\beta z}).$$

Константы интегрирования определяются граничными условиями (рис. 14).

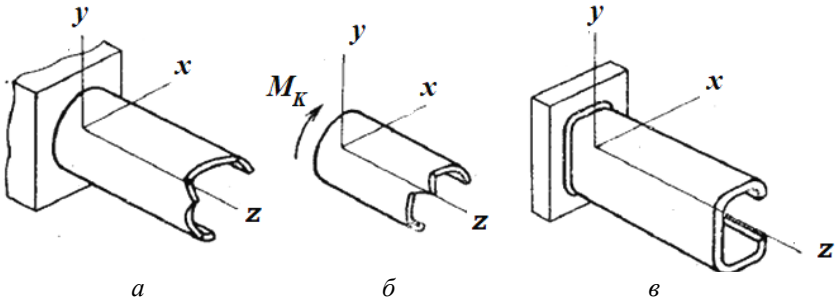


Рис. 14

*Жесткая заделка* (рис. 14,а):  $\theta(0) = \frac{d\theta}{dz}(0) = 0$ . При этом в заделке внутренний крутящий момент и касательные напряжения свободного кручения равны нулю.

*Свободный торец* (рис. 14,б). Нормальные напряжения на свободном торце отсутствуют  $\frac{d^2\theta}{dz^2}(0) = 0$ .

При отсутствии сосредоточенного внешнего момента

$$GJ_{\epsilon} \frac{d\theta}{dz}(0) - EJ_{\omega} \frac{d^3\theta}{dz^3}(0) = 0,$$

при наличии внешнего момента  $M_K$

$$GJ_{\epsilon} \frac{d\theta}{dz}(0) - EJ_{\omega} \frac{d^3\theta}{dz^3}(0) = M_K.$$

Свободное опирание без поворота (рис. 14,в). Отсутствие нормальных напряжений:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}(0) = 0,$$

угловых перемещений:

$$\theta(0) = 0.$$

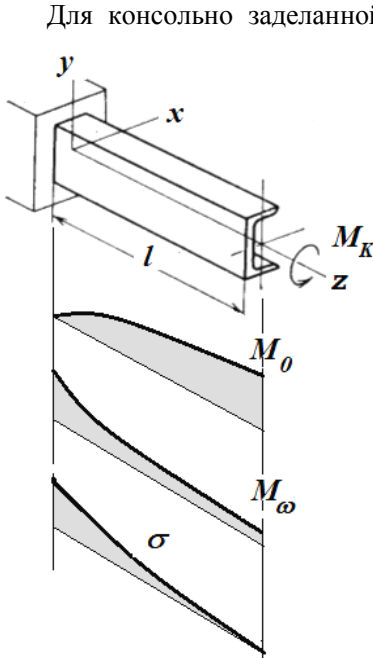


Рис. 15

Для консольно заделанной ( $z = 0$ ) балки с приложенным на свободном торце ( $z = l$ ) сосредоточенным моментом  $M_K$  (рис. 15) найденное из решения дифференциального уравнения распределение внутренних моментов чистого (свободного) ( $M_0$ ) и стесненного ( $M_\omega$ ) кручения по длине балки:

$$\dot{\lambda}_0 = \dot{\lambda}_\epsilon \left(1 - \frac{\text{ch}K(l-z)}{\text{ch}Kl}\right),$$

$$\dot{\lambda}_\omega = \dot{\lambda}_\epsilon \frac{\text{ch}K(l-z)}{\text{ch}Kl},$$

при  $z = l$

$$\dot{\lambda}_0 = \dot{\lambda}_\epsilon \left(1 - \frac{1}{\text{ch}Kl}\right),$$

$$\dot{\lambda}_\omega = \dot{\lambda}_\epsilon \frac{1}{\text{ch}Kl},$$

где  $K = \sqrt{\frac{GJ_\epsilon}{EJ_\omega}}$  – изгибно-крутильная характеристика поперечного сечения.

Нормальные напряжения стесненного кручения:

$$\sigma = -\frac{d^2\theta(z)}{dz^2} E\omega = -\frac{\dot{\lambda}_\epsilon}{\beta J_\epsilon} \omega \frac{\text{sh}\beta(l-z)}{\text{ch}\beta l}.$$

## 7. Касательные напряжения при поперечном изгибе стержней

При выводе формулы касательных напряжений для поперечного изгиба (формулы Д.И Журавского) рассмотрен частный случай: сечение симметричное, сплошное. Была принята гипотеза о параллельности касательных напряжений и уравнивающей их поперечной силе. Поперечная сила  $Q$ , действующая по направлению одной из главных осей, полностью уравнивается равнодействующей касательных напряжений, что исключает возможность появления крутящего момента (рис. 16). Гипотеза применима для балок массивного (в том числе прямоугольного) поперечного сечения.

Формула Журавского:

$$\tau = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{bj_x}, \quad (11)$$

где  $Q$  – поперечная сила, приводящая к изгибу в плоскости  $yOz$ ;  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент относительно оси  $x$  отсеченной части поперечного сечения;  $b$  – ширина поперечного сечения;  $j_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения. Оси  $x, y$  – главные центральные.

В то же время на границе детали произвольной формы (рис. 17, а) нормальная к поверхности составляющая касательных напряжений  $\tau_n$  равна нулю в соответствии с законом парности касательных напряжений (соответствующие внешние продольные поверхностные нагрузки на стержень при поперечном изгибе отсутствуют). То есть, касательные напряжения на поверхности направлены по касательной к контуру сечения, что противоречит принятым допущениям. Направление касательных напряжений на определенной высоте  $y$  поперечного сечения показано на рис. 17, б.

Таким образом, формула Журавского определяет некоторое среднее значение касательного напряжения, параллельного линии действия поперечной силы, и не дает представления о величине перпендикулярной (боковой) составляющей. Тем не менее для балок с выпуклым массивным сечением распределение максимальных касательных напряже-

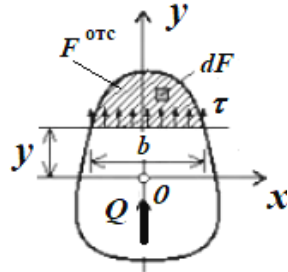


Рис. 16

ний приближенно соответствует выдвинутым гипотезам, и формула Журавского достаточно хорошо согласуется с опытом.

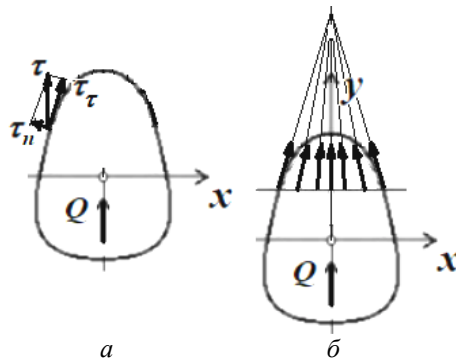


Рис. 17

## 8. Поперечный изгиб тонкостенных стержней

Для тонкостенных стержней, у которых границы сечения отстоят друг от друга на малом расстоянии, формула Журавского может привести к грубым ошибкам.

При поперечном изгибе балок несимметричного тонкостенного сечения касательные напряжения распределяются по сечению балки несимметрично относительно главной центральной оси инерции сечения, вдоль которой приложена поперечная сила  $Q$ . Равнодействующая касательных напряжений  $R_\tau$  не проходит через центр тяжести поперечного сечения балки. Возникает пара сил, приводящая к появлению дополнительных касательных напряжений кручения (рис. 18).

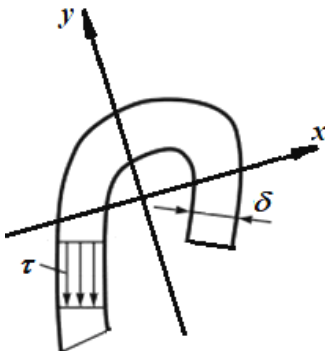


Рис. 18

При выводе формулы касательных напряжений для тонкостенных профилей принят ряд допущений, упрощающих решение задачи.

1. Касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенного стержня направлены параллельно касательной к средней линии сечения, а не линии действия поперечной силы.

2. Касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенного стержня равномерно распределены по толщине стенки сечения (ширина сечения определяется минимальным размером  $\delta$ , а не размером по направлению, перпендикулярному линии действия поперечной силы).

Величину касательных напряжений определяют по формуле, схожей с формулой Журавского и внешне отличающейся от нее только тем, что вместо ширины  $b$  сечения на уровне определения касательных напряжений используют толщину  $\delta$ .

Итак, касательные напряжения в тонкостенном стержне постоянны по толщине стенок и в каждой точке контура определяются по формуле

$$\tau = \frac{q}{\delta}, \quad (12)$$

где  $\delta$  – толщина стенки;  $q$  – поток касательных сил (ПКС), который в соответствии с балочной теорией сдвига распределяется в сечении по закону текущих статических моментов отсеченных частей поперечно-го сечения:

$$q = \frac{Q_y S_x^{\text{идн}}}{J_x} + \frac{Q_x S_y^{\text{идн}}}{J_y}. \quad (13)$$

Формула записана в предположении, что оси  $x$  и  $y$  являются главными центральными осями сечения. Главные центральные оси сечения отличаются от прочих осей тем, что начало координат лежит в центре тяжести сечения и, следовательно, равны нулю полные статические моменты сечения:  $S_{xF} = S_{yF} = 0$ ; положение осей таково, что осевые моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ , экстремальны, а центробежный момент инерции сечения  $J_{xy}$  равен нулю.

Практическое использование формулы (13) связано с положением главных центральных осей:

1) сечение имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (см. например, рис. 2,б). Заданная сила  $Q$  действует вдоль оси  $y$ . Балочная формула сдвига принимает вид  $q = \frac{Q_y S_x^{\text{идн}}}{J_x}$ ;

2) сечение имеет ось симметрии, *перпендикулярную* действующей силе сдвига. В этом случае не требуется искать положение второй главной оси и можно прямо переходить к формуле (13), т.е. определять осевой момент инерции и строить эпюру текущих статических моментов;

3) сечение имеет ось симметрии, *параллельную* действующей силе сдвига. В этом случае необходимо найти положение второй главной оси, для чего достаточно определить центр тяжести сечения. Когда положение оси  $x$  становится известно, приходим к первому варианту;

4) самый общий случай: сечение не имеет осей симметрии и положение главных осей неизвестно. В этом случае необходимо выполнить весь комплекс процедур по определению положения главных осей инерции сечения (перенос вспомогательных осей в центр тяжести сечения и поворот центральных осей до положения главных), в результате чего приходим к основному случаю.

### 9. Определение положения центра тяжести поперечного сечения

Если задача относится ко второму варианту, то необходимо определить положение центра тяжести сечения, через который проходит вторая главная ось сечения  $x$ , перпендикулярная оси симметрии  $y$ . Для этого следует выбрать вспомогательную ось  $x^\circ$ , перпендикулярную оси  $y$ , но не проходящую через центр тяжести. Рекомендуется проводить эту ось либо через горизонтальный элемент профиля, либо через центр окружности дугового элемента. Сечение следует рассматривать как совокупность прямолинейных отрезков и дуг окружности.

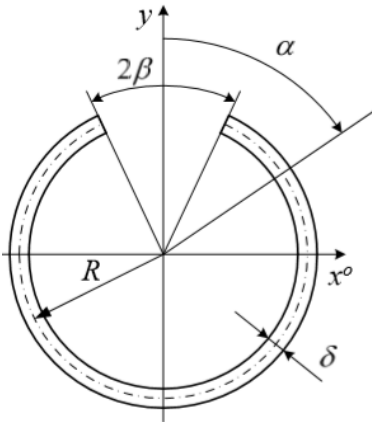


Рис. 19

Отдельно рассмотрим случаи тонкостенных поперечных сечений, полученных на основе криволинейных (дуговых) и прямолинейных (прямоугольных) элементов.

Рассмотрим дуговой элемент, изображенный на рис. 19. Вычислим его "местные" характеристики с помощью интегрирования.

В случае дугового элемента с углом выреза  $2\beta$  вводим угловую координату  $\alpha$ , отсчитываемую от вертикали по часовой стрелке. Тогда  $y = R \cos \alpha$ ,  $dt = R d\alpha$ .

$$S_{xF}^0 = 2 \int_{\beta}^{\pi} y \delta dt = 2 \int_{\beta}^{\pi} R \cos \alpha R \delta d\alpha = -2R^2 \delta \sin \beta,$$

$$F = 2(\pi - \beta)R\delta,$$

$$y_{\text{оо}} = \frac{S_{xF}^0}{F} = -\frac{\sin \beta}{\pi - \beta} R.$$

Таким образом, центр тяжести расположен на оси симметрии на расстоянии  $y_{\text{оо}} = \frac{\sin \beta}{\pi - \beta} R$  от оси  $x^0$  противоположно вырезу.

Для полукольца – дугового элемента с углом раствора  $180^\circ$  (рис. 20) расстояние до центра тяжести:  $y_{\text{оо}} = \frac{2}{\pi} R$ .

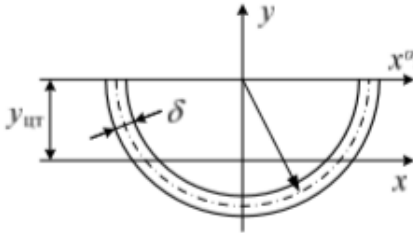


Рис. 20

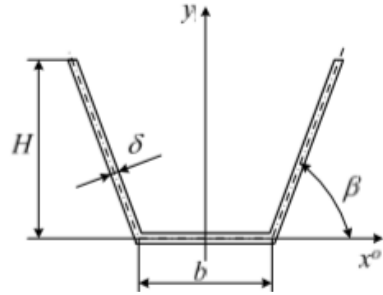


Рис. 21

Пусть тонкостенное поперечное сечение состоит из прямолинейных элементов, площадь  $F_i$  и положение центра тяжести  $y_i$  каждого из которых известно. Площадь сечения определяется суммированием площадей элементов:  $F = \sum F_i$ . Полный статический момент сечения относительно вспомогательной оси:  $S_{xF}^0 = \sum F_i y_i^0$ . Расстояние от вспомогательной оси до центра тяжести сечения:  $y_{\text{оо}}^0 = \frac{S_{xF}^0}{F}$ .

Для профиля, изображенного на рис. 21,

$$F = b\delta + 2 \frac{H\delta}{\sin \beta},$$

$$S_{xF}^0 = 2 \frac{H\delta}{\sin \beta} \frac{H}{2} = \frac{H^2\delta}{\sin \beta}.$$



## 10. Определение осевого момента инерции поперечного сечения

Сечение тонкостенного стержня представляет собой совокупность очень узких полосок – прямолинейных и криволинейных. Момент инерции любой из них относительно произвольной оси  $x$  определяется как сумма собственного момента инерции  $J_x^0$  (т.е. момента инерции полоски относительно оси, параллельной оси  $x$ , но проходящей через центр тяжести полоски) и переносного момента инерции – произведения квадрата расстояния между осями на площадь полоски:

$$J_x = J_x^0 + y_0^2 F. \quad (14)$$

При повороте центральных осей относительно главных собственных момент инерции элемента определяется через его главные моменты инерции по формуле

$$j_x^0 = j_{\max} \cos^2 \beta + j_{\min} \sin^2 \beta, \quad (15)$$

где  $\beta$  – угол между осью максимального момента инерции и осью  $x$ . В случае прямолинейного участка контура минимальный момент инерции принимается равным нулю, что соответствует гипотезе о равномерном распределении нормальных напряжений по толщине стенок.

Для трех элементов, указанных на рис. 22:

$$1 - j_x^0 = \frac{\delta b^3}{12} + a^2 \delta b,$$

$$2 - j_x^0 = \frac{\delta b^3}{12} \cos^2 \beta + a^2 \delta b,$$

$$3 - j_x^0 = a^2 \delta b.$$

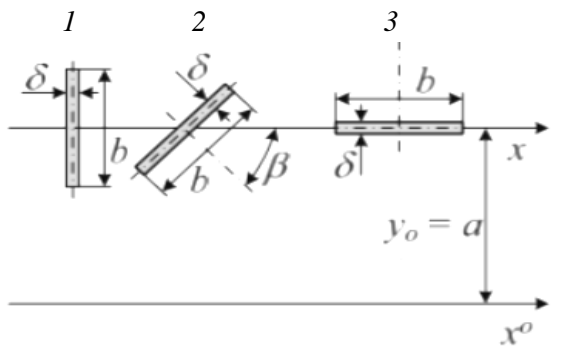


Рис. 22

Для профиля, изображенного на рис. 23:

$$j_x = 2j_{x_1} + 2j_{x_2} + 2j_{x_3} + j_{x_4},$$

$$j_{x_1} = \frac{c^3\delta}{12} + y_{0_1}^2 c\delta, \text{ где } y_{0_1} = \frac{h}{2} + b \sin \alpha + \frac{c}{2},$$

$$j_{x_2} = y_{0_2}^2 a\delta, \text{ где } y_{0_2} = \frac{h}{2} + b \sin \alpha,$$

$$j_{x_3} = \frac{b^3\delta}{12} \sin^2 \alpha + y_{0_3}^2 b\delta, \text{ где } y_{0_3} = \frac{h}{2} + \frac{1}{2} b \sin \alpha,$$

$$j_{x_4} = \frac{h^3\delta}{12}.$$

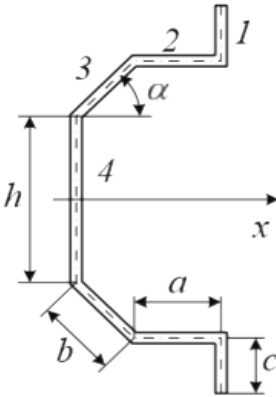


Рис. 23

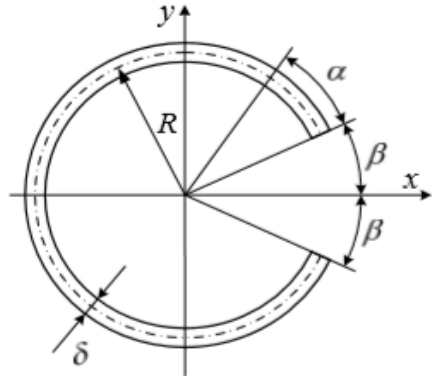


Рис. 24

Если участок контура представляет собой дугу окружности, для нахождения его собственного момента инерции приходится применять интегрирование. При этом следует вместо дуговой координаты  $t$  использовать угловую координату  $\alpha$ . Элемент площади в этом случае  $dF = R\delta d\alpha$ . Координату  $y$  такого элемента также следует выразить через  $R$  и  $\alpha$ . Момент инерции сечения в виде сектора (рис. 24):

$$\begin{aligned} j_x &= \int y^2 dF = \int_{\beta}^{2\pi-\beta} (R \sin \alpha)^2 R\delta d\alpha = R^3\delta \int_{\beta}^{2\pi-\beta} \sin^2 \alpha d\alpha = \\ &= R^3\delta \left[ \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right]_{\beta}^{2\pi-\beta} = R^3\delta(\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta). \end{aligned}$$

Для полукольца при  $\beta = \pi/2$  (с учетом направления осей на рис. 20) осевые моменты инерции:  $j_y = 0,5\pi R^3\delta$ ;  $j_x = 0,2976R^3\delta$ .

### **11. Построение эпюр текущих статических моментов (статических моментов отсеченных частей) поперечного сечения**

Текущий статический момент (статический момент отсеченной части) поперечного сечения в точке контурной линии есть функция дуговой координаты этой точки и определяется как интеграл с переменным верхним пределом  $t$ :

$$S_x(t) = \int_0^t y(\xi)\delta(\xi)d(\xi),$$

где  $\xi$  – переменная интегрирования  $0 \leq \xi \leq t$ .

Для того чтобы преобразовать данный интеграл в явную функцию от  $t$ , необходимо:

- 1) выбрать начальные точки и направления отсчета дуговых координат;
- 2) разбить контурную линию профиля на участки;
- 3) построить параметрические зависимости  $y(\xi)$  и  $\delta(\xi)$  для каждого из участков;
- 4) провести интегрирование, подставить в первообразную верхний (переменный) и нижний пределы;
- 5) исследовать полученную функцию на предмет наличия экстремума или перегиба, выпуклости или вогнутости.

Последовательно рассмотрим все выделенные этапы определения текущих статических моментов поперечного сечения

#### ***Выбор начальной точки и направления дуговой координаты.***

Существует два типа открытых профилей: разветвленные и неразветвленные. В открытом неразветвленном профиле имеются две концевые точки, в каждой из которых действительное значение потока касательных сил  $q = 0$ .

Такие точки называют свободными. Одну из них следует выбрать в качестве начальной точки обхода, обычно ту из двух концевых (свободных) точек, которая лежит в зоне положительных  $x$  и  $y$ . Направление дуговой координаты в неразветвленном контуре однозначно определяется выбором начальной точки.

В рассматриваемом примере (рис. 25) в соответствии с приведенными выше рекомендациями начальная точка выбирается в верхней концевой точке контурной линии (точка  $A$ ). Следовательно, направление обхода – против часовой стрелки.

Отличительными признаками разветвленного профиля являются как наличие трех и более свободных точек, так и наличие узлов.

Узлом называется точка профиля, в которой сходятся три (или более) контурные линии (на рис. 26,*a*  $C, D$ ). Участки между узлами называются общими. Типичным представителем разветвленного контура является двутавр (рис. 26,*a*).

Тавр (рис. 26,*б*) можно рассматривать как частный случай двутавра – с нулевой шириной нижнего пояса, разветвленный контур – как наложение нескольких открытых неразветвленных. Один из этих контуров назначается основным, другие контуры – вспомогательными. Начальная точка и направление обхода в основном контуре выбираются так же, как в неразветвленном контуре. Начальные точки и направления дуговой координаты во вспомогательных контурах выбираются таким образом, чтобы в общей части основного и вспомогательного контуров направления дуговых координат (направления обхода) совпадали.

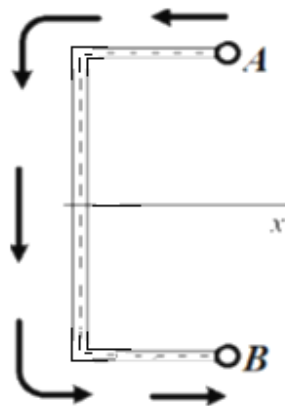


Рис. 25

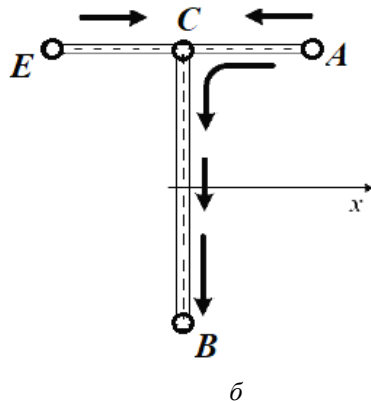
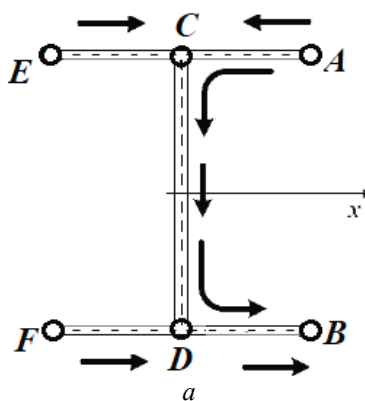


Рис. 26

Примеры основных контуров –  $ACDB$  (рис. 26,*а*),  $ACB$  (рис. 26,*б*); вспомогательных –  $EC$ ,  $FD$  (рис. 26,*а*),  $EC$  (рис. 26,*б*).

При движении точки вдоль основного контура участка, не входящие в него, рассматриваются как отростки и учитываются в эпюре текущих статических моментов подобно сосредоточенным элементам: при переходе через узел к статическому моменту в точке, предшествующей узлу, прибавляется полный статический момент отростка. Аналогично при рассмотрении любого вспомогательного контура все участки, не входящие в него, в том числе участки основного контура, также рассматриваются как отростки и учитываются при построении эпюры текущих статических моментов подобным же образом.

**Разбиение контура на участки.** Участком называется такая часть длины контурной линии, в пределах которой зависимость текущего статического момента от дуговой координаты описывается одной формулой. Достаточно, чтобы одной формулой описывались зависимости  $y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\delta(t)$  при отсутствии на участке узлов и сосредоточенных продольных элементов.

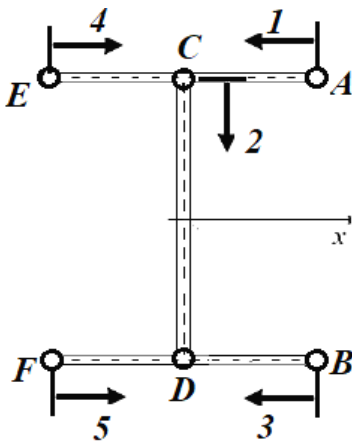


Рис. 27

Отсюда следует вывод, что границами участков являются:

- а) точки излома контурной линии (изменяется вид функции  $y(\xi)$ );
- б) точки скачкообразного изменения толщины сечения  $\delta(\xi)$ ;
- в) сосредоточенные продольные элементы;
- г) узловые точки разветвленных контуров.

Например, в рассматриваемом контуре типа «двутавр» (рис. 27) содержится пять участков.

**Параметрические зависимости текущих координат точек на контуре.** В соответствии со свойством автономности начальную точку отсчета дуговой координаты выбираем на каждом участке заново. Характер зависимости  $S_x(t)$  определяется, в основном, характером подынтегральной функции  $y(\xi)$  на данном участке. Рассмотрим простейшие случаи.

Если участок контурной линии есть отрезок прямой, которая наклонена к оси  $x$  под углом  $\beta$ , то  $y(\xi) = y_0 \pm \xi \sin \beta$ , где  $y_0$  – координата  $y$  начальной точки участка ( $\xi = 0$ ).

Если рассматриваемый участок представляет собой дугу окружности радиусом  $R$ , то для указания местоположения точек на контуре следует перейти от дуговых координат  $t$  и  $\xi (0 \leq \xi \leq t)$  к угловым  $\psi$  и  $\varphi$  ( $\varphi_0 \leq \varphi \leq \psi$ ), причем  $t = R\psi$ ,  $\xi = \varphi - \varphi_0$ ,  $Rd\xi = Rd\varphi$ .

Так, для профиля, показанного на рис. 24, в начальной точке  $\varphi_0 = \beta$ , вертикальная координата текущей точки  $y = R \sin \varphi$  и текущий статический момент в точке с угловой координатой  $\psi$ , причем

$$\beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \text{ равен: } S_x(\psi) = \int_{\beta}^{\psi} R \sin \varphi R \delta d\varphi = R^2 \delta (\cos \beta - \cos \psi).$$

В качестве общих правил построения эпюр можно перечислить следующие

1. В начальной точке контура текущий статический момент равен нулю или статическому моменту сосредоточенного элемента, расположенного в этой точке.

2. Правило автономности: на каждом участке выбирается своя дуговая координата с нулем в начальной точке; направление этой координаты совпадает с направлением общей дуговой координаты профиля. Возможность этого упрощения обеспечивается выполнением правил 3 и 4.

3. В пределах одного участка текущие статические моменты определяются как сумма текущего статического момента в начальной точке участка (постоянная составляющая) и приращения, соответствующего рассматриваемой точке участка (переменная составляющая).

4. Правило стыковки участков: текущий статический момент в начальной точке следующего участка определяется как сумма текущего статического момента в последней точке предыдущего участка, статического момента продольного сосредоточенного элемента, расположенного на границе участков, а также полного статического момента отрезка, примыкающего к границе двух участков (как продольный элемент, так и отрезок могут отсутствовать).

5. Правило нулевой суммы: в конечной точке последнего участка текущий статический момент равен нулю или статическому моменту сосредоточенного элемента, расположенного в этой точке.

На основании вышеизложенного построим эпюру текущих статических моментов (отсеченных частей) относительно оси  $x$  поперечно-

го сечения швеллера и двутавра с характерными размерами  $H = 40$  см,  $B = 10$  см при толщине профиля  $\delta = 1$  см.

Резльтирующая эпюра  $S_x$ , см<sup>3</sup> приведена на рис. 28.

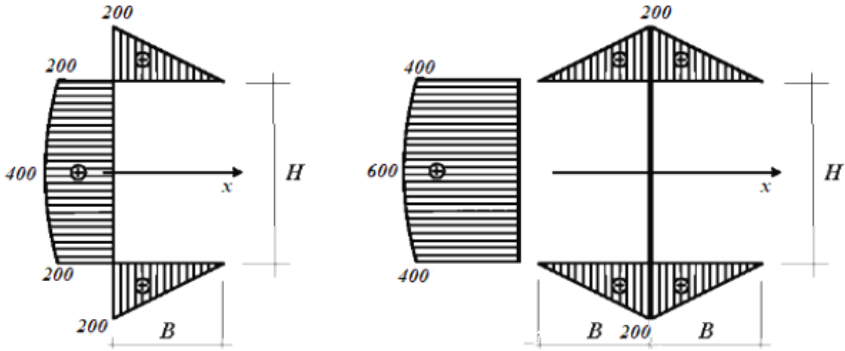


Рис. 28

## 12. Вычисление касательных напряжений в характерных точках контура при поперечном изгибе

Применение формулы (13) для расчета касательных напряжений в тонкостенных сечениях показывает, что эти напряжения распределены потоком с преимущественным направлением в сторону поперечной силы. При постоянной толщине стенки эти напряжения обычно достигают максимального значения на нейтральной линии, где  $y = 0$ . Если во всех точках контура касательные напряжения получились одного знака – отрицательные, значит, во всех точках контура сохраняется одно и то же направление потоков касательных сил – по часовой стрелке.

Для швеллера с размерами, указанными выше, момент инерции относительно оси  $x$  в соответствии с (14):

$$j_x = \frac{H^3 \delta}{12} + 2 \left( \frac{H}{2} \right)^2 B \delta = 2,13 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

Для двутавра момент инерции относительно оси  $x$  в соответствии с (14):

$$j_x = \frac{H^3 \delta}{12} + 4 \left( \frac{H}{2} \right)^2 B \delta = 3,73 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

Направление потока касательных сил и эпюры касательных напряжений для швеллера и двутавра с указанными выше размерами при  $Q_y = 100 \text{ кН}$  приведены на рис. 29.

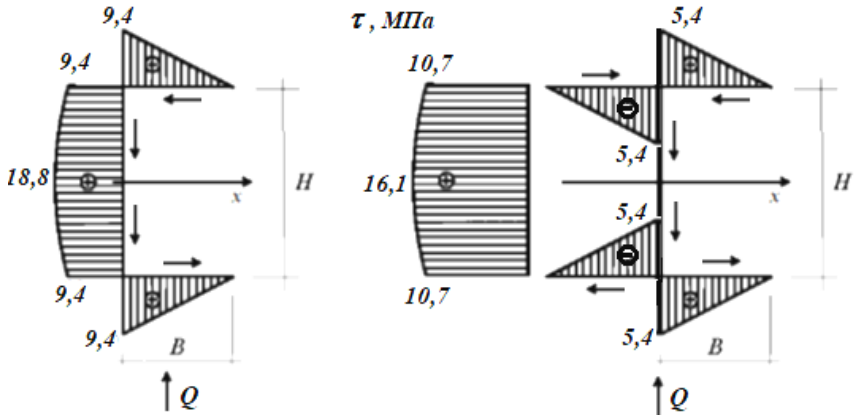


Рис. 29

Принципиальные картины распределения текущих статических моментов, направления потока касательных сил и распределения касательных для швеллера с постоянной толщиной профиля при действии поперечной силы вдоль оси симметрии приведены на рис. 30.

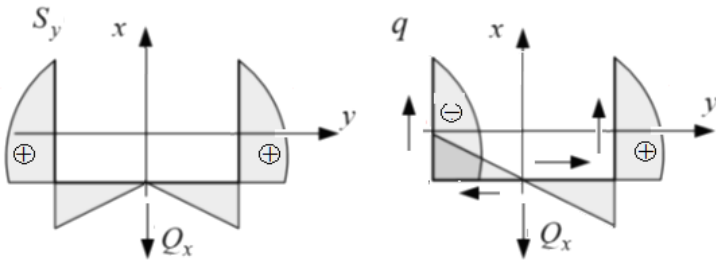
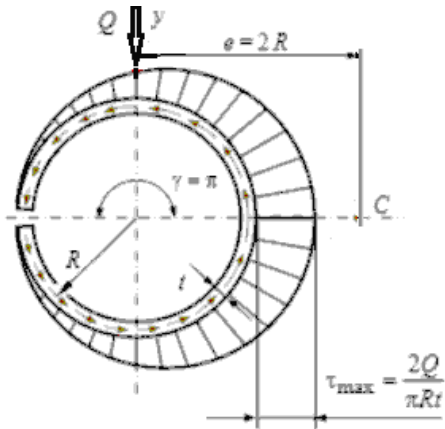


Рис. 30



Направления потока касательных сил и распределения касательных для разрезного кольца при различных направлениях поперечной



силы приведены на рис. 31, 32.

Рис. 31

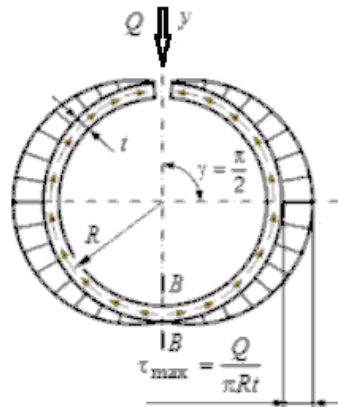


Рис. 32

### 13. Центр изгиба поперечного сечения открытого тонкостенного профиля

Центр изгиба (сдвига) – точка в сечении открытого тонкостенного профиля, через которую проходит равнодействующая касательных напряжений при поперечном изгибе. Иначе, центр изгиба (сдвига) – такая точка в сечении открытого тонкостенного профиля, при прохождении через которую линии действия перерезывающей силы не будет возникать кручение.

Положение центра изгиба не зависит от действующих сил и определяется геометрическими характеристиками сечения.

Обычно для определения положения центра изгиба открытого профиля предпочитают использовать «метод фиктивной силы», суть которого в следующем.

1. По одной из главных центральных осей (в ниже рассмотренном примере – ось  $y$ ) к сечению мысленно прикладывается фиктивная сила  $Q_y$  произвольной величины и направления.

2. Строится эпюра потоков касательных сил в соответствии с балочной формулой сдвига (13) с обязательным указанием направления потока на каждом из участков. Для этого необходимо:

а) определить момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $J_x$ ;

б) построить эпюру текущих статических моментов площади сечения относительно главной центральной оси  $S_x$ ;

в) определить направление и величину потока касательных усилий  $q$ .

3. Произвольно выбирается моментная точка  $T$  (рис. 33) и правило знаков для моментов относительно этой точки, например, положительными считать моменты по часовой стрелке. Выбор моментной точки  $T$  нужно производить так, чтобы просто вычислялось значение  $M_T(q)$ .

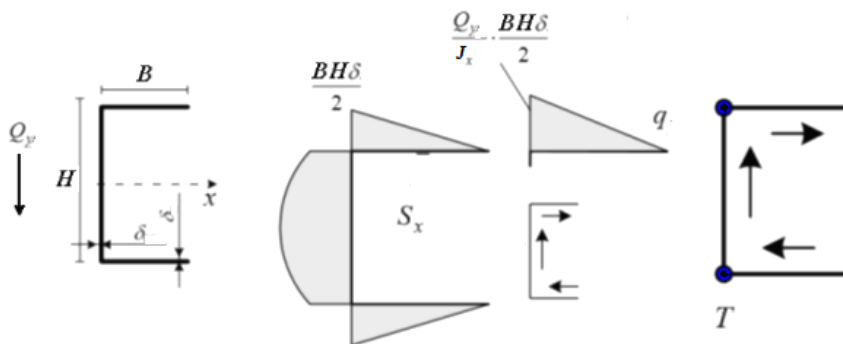


Рис. 33

4. Определяется условие статической эквивалентности моментов относительно точки  $T$ . Момент силы  $Q_y$  равен:  $M_T(Q_y) = Q_y a_T$ , где  $a_T$  – неизвестное расстояние от моментной точки до линии действия силы  $Q_y$ ;  $a_T = M_T(q)/Q_y$  – координата центра изгиба по оси  $x$ . При наличии оси симметрии сечения центр изгиба лежит на ней. При необходимости поиска второй координаты необходимо приложить  $Q_x$

Для определения центра изгиба следует учитывать следующие правила.

1. Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит в точке их пересечения.

Центр изгиба обычно расположен вне открытого контура поперечного сечения тонкостенного стержня. Примеры «возможных» открытых контуров обозначены штриховкой на рис. 34.



Рис. 34

Легко установить положение центра изгиба для тонкостенного сечения, состоящего из нескольких прямоугольников, оси которых пересекаются в одной точке (сечений типа «сростки» – «пучки»). Касательные напряжения в каждом таком прямоугольнике при прямом поперечном изгибе направлены параллельно его длинным сторонам, а равнодействующая элементарных касательных сил по каждому прямоугольнику совпадает с его осью. Все такие равнодействующие пересекаются в одной точке (в точке пересечения осей прямоугольников), а потому поперечная сила в сечении, являющаяся их общей равнодействующей, при прямом поперечном изгибе проходит через эту точку, которая, следовательно, является центром изгиба (рис. 35).

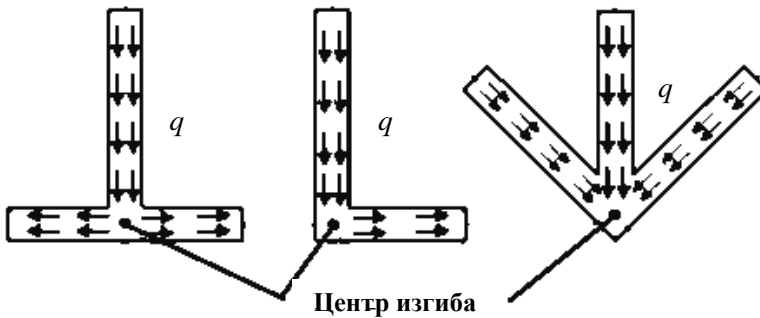


Рис. 35

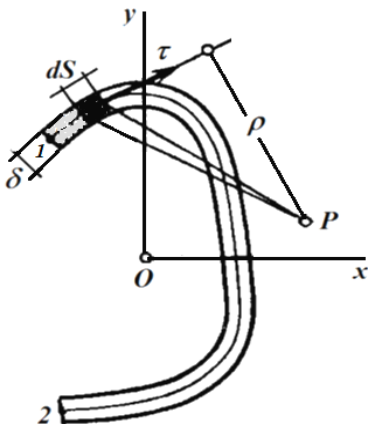


Рис. 36

2. Центр изгиба (сдвига) и центр кручения совпадают. Часто указанную точку называют центром жесткости поперечного сечения.

Для доказательства запишем момент касательных сил, возник-

кающих при поперечном изгибе, относительно некоторой точки  $P$  (рис. 36).

Крутящий момент:

$$M_P = \int_F \tau(s)\delta(s)\rho(s)ds = \int_F \tau(s)\delta(s)d\omega.$$

При постоянной толщине профиля  $\delta$   $M_P = \int_F \tau\delta d\omega$ .

Воспользуемся соотношениями (12), (13):

$$M_D = \frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} d\omega + \frac{Q_x}{J_y} \int_F S_y^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} d\omega = \frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} \frac{d\omega}{dF} dF + \frac{Q_x}{J_y} \int_F S_y^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} \frac{d\omega}{dF} dF.$$

Возьмем по частям первый интеграл:

$$I_1 = \int_F S_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} \frac{d\omega}{dF} dF = S_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} \omega \Big|_1^2 - \int_F \frac{dS_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}}}{dF} \omega dF.$$

Принимая во внимание, что точки 1,2 – начальная и конечная точки контура поперечного сечения, а оси  $x$ ,  $y$  – центральные ( $S_x = S_y = 0$ ), запишем:

$$I_1 = - \int_F \frac{dS_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}}}{dF} \omega dF.$$

Так как  $S_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} = \int_{F^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}}} y dF$  или  $S_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}} = \int_F y dF$ , то  $\frac{dS_x^{\hat{i}\hat{o}\hat{n}}}{dF} = y$ .

Итак,  $I_1 = - \int_F \omega y dF$ . Аналогично преобразуем второй интеграл, после чего получим

$$M_P = - \frac{Q_y}{J_x} \int_F \omega y dF - \frac{Q_x}{J_y} \int_F \omega x dF.$$

Для равенства нулю момента потока касательных сил, возникающих при поперечном изгибе, необходимо выполнение условий

$$\int_F y \omega dF = \int_F x \omega dF = 0.$$

Ранее положение центра кручения поперечного сечения определялось равенством нулю секториальных линейных моментов площади поперечного сечения относительно осей  $x, y$ :

$$S_{\omega x} = \int_F \omega y dF = 0, \quad S_{\omega y} = \int_F \omega x dF = 0,$$

т.е. центры изгиба и кручения поперечного сечения тонкостенного стержня совпадают.

#### 14. Пример определения центра жесткости методом фиктивной силы

Рассмотрим вышеизложенный теоретический материал на примере разомкнутого тонкостенного коробчатого профиля (рис. 37).

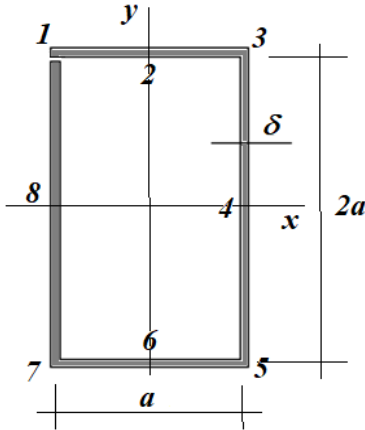


Рис. 37

Если ширина разреза незначительна, то положение главных центральных осей и значения соответствующих им моментов инерции разомкнутого и соответствующего замкнутого тонкостенного коробчатого профиля совпадают.

Момент инерции поперечного сечения относительно оси  $X$ :

$$J_{\bar{O}} = 2 \left( \frac{2^3}{12} + 1 \right) a^3 \delta = \frac{10}{3} a^3 \delta.$$

относительно оси  $Y$ :

$$J_Y = 2 \left( \frac{1}{12} + 2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right) a^3 \delta = \frac{7}{6} a^3 \delta.$$

Найдем значения текущего статического момента инерции (статического момента инерции отсеченной части) поперечного сечения относительно оси  $X$   $S_{\bar{O}}^{\text{идн}}$  в характерных точках:

$$S_Y^{\text{идн}^3} = a \delta a = a^2 \delta;$$

$$S_Y^{\text{ion}^4} = S_Y^{\text{ion}^4} + a\delta \frac{1}{2}a = 1,5a^2\delta;$$

$$S_Y^{\text{ion}^8} = 0,5a^2\delta.$$

Распределение текущих статических моментов приведено на рис. 38.

Для определения положения центра жесткости (изгиба) сечения последовательно приложим поперечную силу в направлении осей  $Y, X$ .

При приложении  $Q_y$  поток касательных сил  $q = \frac{Q_y S_x^{\text{ion}}}{J_x}$ .

Введем параметр  $t$  и вычислим суммарные касательные усилия  $Q_\tau$  на двух участках тонкостенного профиля:

$$Q_\tau^1 = \frac{Q_y}{J_x} \int_0^a t\delta a dt = \frac{Q_y}{J_x} \frac{1}{2} a^3 \delta,$$

$$Q_\tau^2 = \frac{Q_x}{J_x} 2 \int_0^a t\delta (a - \frac{t}{2}) dt = \frac{Q_x}{J_x} \frac{2}{3} a^3 \delta,$$

$$Q_\tau^3 = \frac{Q_x}{J_x} (\frac{2}{3} + 2) a^3 \delta.$$

Из условий статического равновесия сумма внешних и внутренних сил должна равняться нулю, т.е.

$$\sum Q_\tau^i + Q_y = 0.$$

$$Q_\tau^3 + Q_\tau^2 = \frac{Q_y}{J_x} \frac{2}{3} a^3 \delta + \frac{Q_x}{J_y} \frac{8}{3} a^3 \delta = \frac{Q_y}{J_x} \frac{10}{3} = Q_y \quad \text{-- промежуточная}$$

проверка выполнена

Момент касательных сил относительно выбранной точки  $M$  (см. рис. 38):

$$M_\tau = -\frac{Q_y}{J_x} \frac{2}{3} a^3 \delta \cdot a + \frac{Q_y}{J_y} \frac{1}{2} a^3 \delta \cdot 2a = \frac{Q_y}{J_x} \frac{1}{3} a^4 \delta = Q_x \frac{1}{10} a.$$

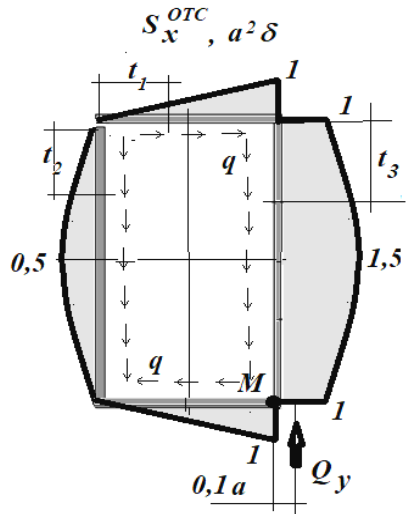


Рис. 38

Таким образом, в случае прохождения линии действия поперечной силы через точку, удаленную от точки  $M$  на расстояние  $0,1a$ , моменты внешних и внутренних поперечных сил взаимно уравновешены.

Найдем значения текущего статического момента инерции (статического момента инерции отсеченной части) поперечного сечения относительно оси  $Y$   $S_Y^{\text{отс}}$  в характерных точках:

$$S_Y^{\text{отс}^2} = \frac{1}{2} a \delta \frac{1}{4} a = 0,125 a^2 \delta;$$

$$S_Y^{\text{отс}^5} = 2 \cdot 0,5 a^2 \delta = 1 a^2 \delta;$$

$$S_Y^{\text{отс}^6} = S_Y^{\text{отс}^5} + \frac{1}{8} a \delta \frac{1}{4} a = 1,125 a^2 \delta.$$

Распределение текущих статических моментов приведено на рис. 39.

При приложении  $Q_x$  поток касательных сил  $q = \frac{Q_x S_Y^{\text{отс}}}{J_y}$ .

$$q = \frac{Q_x S_Y^{\text{отс}}}{J_y}.$$

Введем параметр  $t$  и вычислим суммарные касательные усилия  $Q_\tau$  на участках тонкостенного профиля:

$$Q_\tau^1 = \frac{Q_x}{J_y} 2 \int_0^{a/2} t \delta \left( \frac{a}{2} - \frac{t}{2} \right) dt = \frac{Q_x}{J_y} \frac{1}{12} a^3 \delta,$$

$$Q_\tau^2 = \frac{Q_x}{J_y} \int_0^{2a} t \delta \frac{a}{2} dt = \frac{Q_x}{J_y} a^3 \delta,$$

$$Q_\tau^3 = \frac{Q_x}{J_y} \frac{13}{12} a^3 \delta.$$

Из условий статического равновесия сумма внешних и внутренних усилий должна равняться нулю, т.е.

$$\sum Q_\tau^i + Q_x = 0.$$

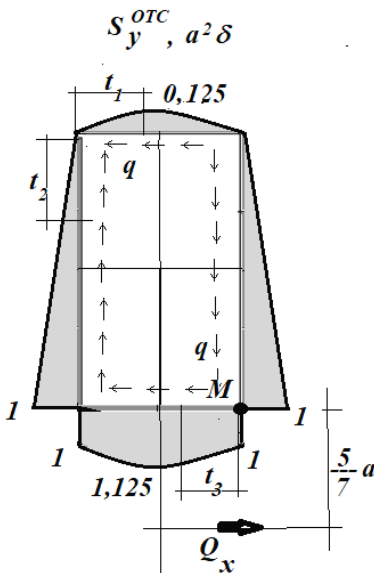


Рис. 39

$$Q_{\tau}^3 + Q_{\tau}^2 = \frac{Q_x}{J_y} \frac{13}{12} a^3 \delta + \frac{Q_x}{J_y} \frac{1}{3} a^3 \delta = \frac{Q_x}{J_{y_x}} \frac{7}{6} = Q_x \quad - \text{промежуточная}$$

проверка выполнена

Момент касательных сил относительно выбранной точки  $M$  (см. рис. 39):

$$M_{\tau} = -\frac{Q_x}{J_y} 1a^3 \delta \cdot a - \frac{Q_x}{J_y} \frac{1}{12} a^3 \delta \cdot 2a = \frac{Q_x}{J_y} \frac{5}{6} a^4 \delta = Q_x \frac{5}{7} a.$$

Таким образом, в случае прохождения линии действия поперечной силы через точку, удаленную от точки  $M$  на расстояние  $\frac{5}{7}a$ , моменты внешних и внутренних поперечных сил взаимно уравновешены.

### **15. Пример выполнения РГР «Расчет стержня тонкостенного профиля»**

**Определение положения центра тяжести поперечного сечения.** Форма и размеры поперечного сечения приведены на рис. 40. Площадь поперечного сечения  $A = (2 + 3 + 1 + 2)a\delta = 8a\delta$ .

Статический момент инерции поперечного сечения относительно оси  $X_1$ :

$$S_{X_1} = (3 \cdot 3/2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1/2)a^2 \delta = (4,5 + 6 - 1)a^2 \delta = 9,5a^2 \delta.$$

Координата центра тяжести поперечного сечения:  $y_0 = S_{X_1} / A \approx 1,188a$  (рис. 41). Момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Y$ :

$$J_Y = (2^3/12 + 1^3/12 + 2(1/2)^2)a^3 \delta = 1,25a^3 \delta.$$



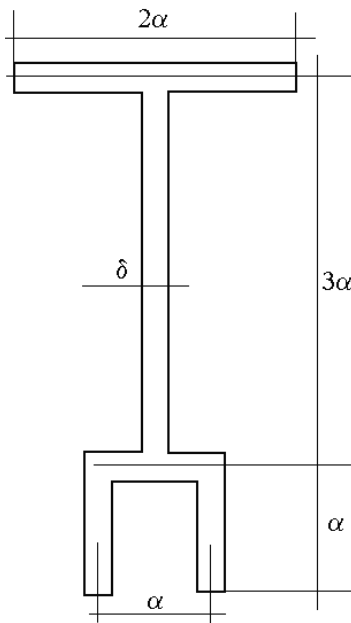


Рис. 40

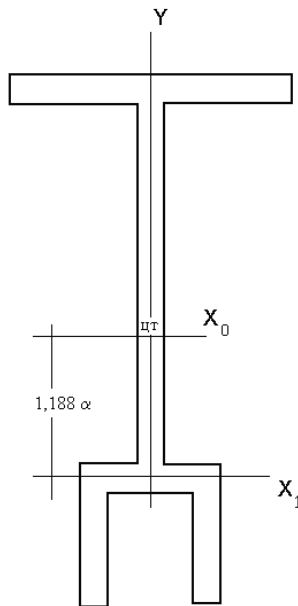


Рис. 41

**Определение секториальных характеристик и центра кручения поперечного сечения.** Момент инерции поперечного сечения при чистом кручении:

$$J_{\xi} = \alpha \cdot 1/3 \cdot (2 + 3 + 1 + 2) a \delta^3 = 1,2 \cdot 2,667 a \delta^3 = 3,2 a \delta^3 ,$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Для швеллера  $\alpha = 1,12$ , для двутавра  $\alpha = 1,2$ .

Эпюра горизонтальной координаты  $X$  точек поперечного сечения приведена на рис. 42, эпюра секториальной площади относительно полюса  $O_1$   $\omega_{O_1}$  – на рис. 43. При обходе участка сечения (относительно выбранного полюса) против часовой стрелки приращение секториальной площади принимается положительным, по часовой стрелке – отрицательным. Начало обхода принимается в точках, лежащих на оси симметрии.

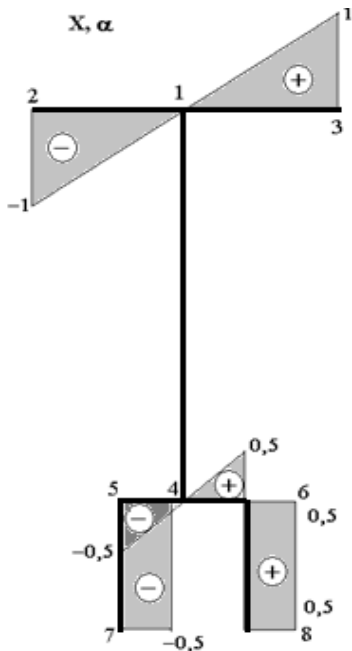


Рис. 42

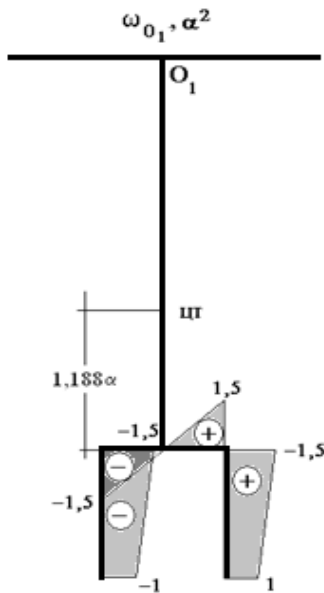


Рис. 43

Секториальные площади в характерных точках поперечного сечения 1-8:

$$\omega_{O_1}^1 = \omega_{O_1}^2 = \omega_{O_1}^3 = \omega_{O_1}^4; \quad \omega_{O_1}^5 = -\frac{1}{2}3a^2; \quad \omega_{O_1}^6 = \frac{1}{2}3a^2;$$

$$\omega_{O_1}^7 = -\frac{1}{2}3a^2 + \frac{1}{2} \cdot 1a^2 = -a^2; \quad \omega_{O_1}^8 = -\frac{1}{2}3a^2 - \frac{1}{2} \cdot 1a^2 = a^2.$$

Секториальный линейный момент площади (статический момент инерции секториальной площади) поперечного сечения относительно оси  $Y$  и при полюсе  $O_1$ :

$$S_{\omega_{O_1}Y} = \int_A \omega_{O_1} x dA = \int_l \omega_{O_1} x \delta dl.$$

Вычисления проведем способом перемножения эпюр Верещагина:

$$S_{\omega_{O1Y}} = 2\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right) a^4 \delta = 2\left(\frac{1}{8} + \frac{5}{8}\right) a^4 \delta = 1,5 a^4 \delta.$$

Координата центра жесткости (он же – центр кручения, изгиба):

$$a_{O_1O} = -S_{\omega_{O1Y}} / J_Y = -1,5 / 1,25 = -1,2a.$$

Эпюра главной секториальной площади (относительно центра жесткости – полюса  $O$ )  $\omega_O$  приведена на рис. 44.

Главные секториальные площади в характерных точках поперечного сечения 1-8:

$$\omega_O^1 = \omega_O^4; \quad \omega_O^2 = 1,2 \cdot 1 = 1,2a^2;$$

$$\omega_O^3 = -1,2 \cdot 1 = -1,2a^2;$$

$$\omega_O^5 = -\frac{1}{2} \cdot 1,8 = -0,9a^2;$$

$$\omega_O^6 = \frac{1}{2} \cdot 1,8 = 0,9a^2;$$

$$\omega_O^7 = -0,9a^2 + \frac{1}{2} \cdot 1a^2 = -0,4a^2; \quad \omega_O^8 = 0,9a^2 - \frac{1}{2} \cdot 1a^2 = 0,4a^2.$$

Секториальный линейный момент площади (статический момент инерции секториальной площади) поперечного сечения относительно оси  $Y$  при полюсе  $O$  (центре жесткости) равен нулю:

$$S_{\omega_{OY}} = \int_A \omega_O x dA = \int_l \omega_O x \delta dl = 0.$$

Проверка правильности вычислений положения центра жесткости:

$$\begin{aligned} S_{\omega_{OY}} &= 2\left(-1,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 0,9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + (0,9 + 0,4) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) a^4 \delta = \\ &= 2(-0,4 + 0,075 + 0,325) a^4 \delta = 0. \end{aligned}$$

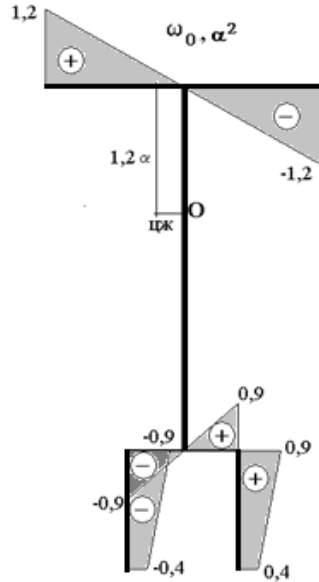


Рис. 44

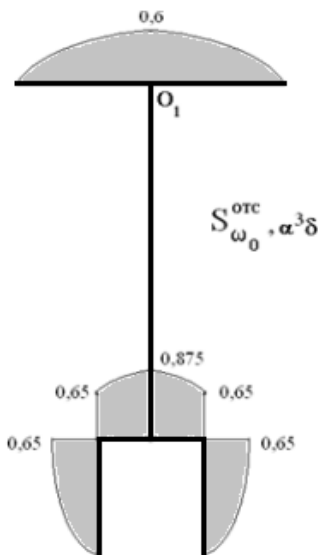


Рис. 45

Статический момент инерции отсеченной части главной секториальной площади поперечного сечения:

$$S_{\omega_0}^{\text{отс}} = \int_{A_{\text{отс}}} \omega_f dA = \int_{l_{\text{отс}}} \omega_f \delta dl.$$

В характерных точках поперечного сечения 1-8 (рис. 45)

$$S_{\omega_0}^{\text{отс}^1} = 1,2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1a^3 \delta = 0,6a^3 \delta;$$

$$S_{\omega_0}^{\text{отс}^2} = S_{\omega_0}^{\text{отс}^3} = 0;$$

$$S_{\omega_0}^{\text{отс}^4} = S_{\omega_0}^{\text{отс}^5} + 0,9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a^3 \delta = (0,65 + 0,225)a^3 \delta = 0,875a^3 \delta;$$

$$S_{\omega_0}^{\text{отс}^5} = S_{\omega_0}^{\text{отс}^6} = (0,9 + 0,4) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1a^3 \delta = 0,65a^3 \delta; \quad S_{\omega_0}^{\text{отс}^7} = S_{\omega_0}^{\text{отс}^8} = 0.$$

**Определение центра изгиба методом фиктивной силы.**

Найдем значения текущего статического момента инерции (статического момента инерции отсеченной части) поперечного сечения относительно оси  $Y$   $S_Y^{\text{отс}}$  в характерных точках:

$$S_Y^{\text{отс}^1} = a \cdot \delta \cdot \frac{1}{2} a = 0,5a^2 \delta; \quad S_Y^{\text{отс}^2} = S_Y^{\text{отс}^3} = 0; \quad S_Y^{\text{отс}^5} = S_Y^{\text{отс}^6} = 0,5a^2 \delta;$$

$$S_Y^{\text{отс}^4} = S_Y^{\text{отс}^5} + \frac{1}{2} a \delta \frac{1}{4} a = 0,625a^2 \delta; \quad S_Y^{\text{отс}^7} = S_Y^{\text{отс}^8} = 0.$$

Распределение текущих статических моментов приведено на рис. 46.

Центр жесткости (изгиба) сечения лежит на оси симметрии  $Y$ . Для определения его положения приложим поперечную силу в направлении оси  $X$ . В соответствии с (13) поток касательных сил

$$q = \frac{Q_x S_y^{\text{идн}}}{J_y}.$$

Введем параметр  $t$  и вычислим суммарные касательные усилия  $Q_\tau$  на участках тонкостенного профиля:

$$Q_\tau^1 = \frac{Q_x}{J_y} 2 \int_0^a t \delta (a - \frac{t}{2}) dt = \frac{Q_x}{J_y} \frac{2}{3} a^3 \delta,$$

$$Q_\tau^2 = \frac{Q_x}{J_y} \int_0^a t \delta \frac{a}{2} dt = \frac{Q_x}{J_y} \frac{1}{4} a^3 \delta,$$

$$\begin{aligned} Q_\tau^3 &= \frac{Q_x}{J_y} 2 \int_0^{a/2} (\frac{1}{2} a^2 \delta + t \delta (\frac{a}{2} - \frac{t}{2})) dt = \\ &= \frac{Q_x}{J_y} \frac{7}{12} a^3 \delta. \end{aligned}$$

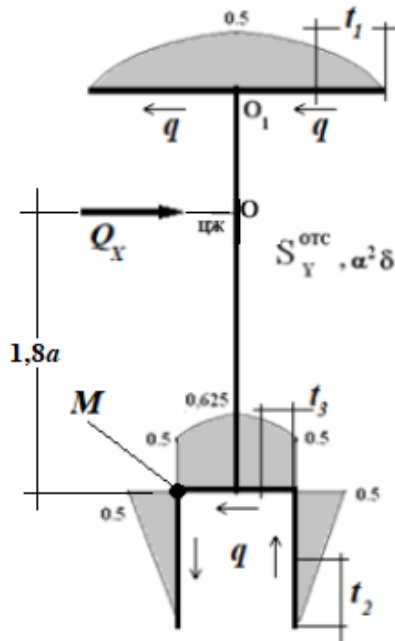


Рис. 46

Из условий статического равновесия сумма внешних и внутренних усилий должна равняться нулю, т.е.  $\sum Q_\tau^i + Q_x = 0$ .

$$Q_\tau^1 + Q_\tau^2 = \frac{Q_x}{J_y} \frac{7}{12} a^3 \delta + \frac{Q_x}{J_y} \frac{2}{3} a^3 \delta = Q_x \left( \frac{7}{12} + \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{4}{5} = Q_x - \text{промежу-}$$

точная проверка выполнена.

Момент касательных сил относительно выбранной точки  $M$  (см. рис. 46):

$$M_\tau = -\frac{Q_x}{J_y} \frac{2}{3} a^3 \delta \cdot 3a + \frac{Q_x}{J_y} \frac{1}{4} a^3 \delta \cdot a = \frac{Q_x}{J_y} \frac{9}{4} a^4 \delta = Q_x \frac{9}{5} a.$$

Таким образом, в случае прохождения линии действия поперечной силы через точку, удаленную от точки  $M$  на расстояние  $1,8a$ ,

моменты внешних и внутренних поперечных сил взаимно уравновешены.

Иначе, момент от касательных напряжений поперечного изгиба относительно найденной точки  $O$  равен нулю или в случае прохождения линии действия поперечной силы через точку  $O$  не возникает эффекта кручения стержня.

Итак, найденные различными способами центры кручения и изгиба совпадают.

**Определение изгибно-крутильных характеристик.** Главный секториальный момент инерции поперечного сечения (при центра жесткости – полюсе  $O$ ):

$$J_{\omega_o} = \int_A \omega_o^2 dA = \int_l \omega_o^2 d\delta dl;$$

$$J_{\omega_o} = 2(1,2 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 1,2 + 0,9 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 0,9 + (0,9 + 0,4) \frac{1}{2} (0,4 + \frac{2}{3} (0,9 - 0,4))) a^5 \delta =$$

$$= 2(0,48 + 0,135 + 0,477) a^5 \delta = 2,183 a^5 \delta.$$

Изгибно-крутильная жесткость поперечного сечения:

$$K = \sqrt{\frac{G \cdot J_K}{E \cdot J_{\omega_o}}}.$$

Принимая для металлов  $\mu = 0,3$  и  $G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 0,385E$ , получим

$$K = \sqrt{\frac{0,385 \cdot 3,2 a \delta^3}{2,183 a^5 \delta}} = 0,751 \frac{\delta}{a^2}.$$

Приложим в центре тяжести сводного торцевого сечения крутящий момент (рис. 47). Направление касательных напряжений в произвольном поперечном сечении от момента стесненного кручения  $M_{\omega}$  показано на рис. 48, от момента свободного кручения  $M_0$  – на рис. 49.

Внешний крутящий момент  $M_K$  уравновешивается суммой внутренних моментов чистого (свободного) ( $M_0$ ) и стесненного ( $M_{\omega}$ ) кручения:  $M_K = M_0 + M_{\omega}$ .

Направление касательных напряжений в произвольном поперечном сечении при действии поперечной силы показано на рис. 50

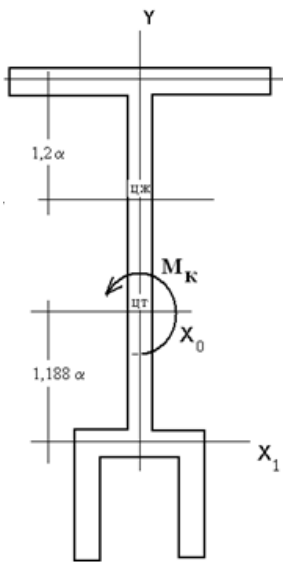


Рис. 47

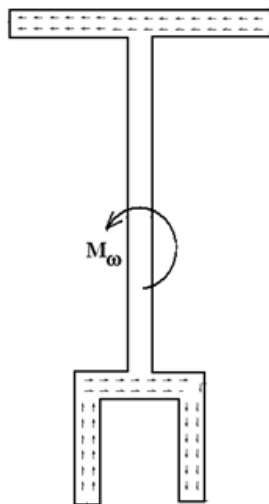


Рис. 48

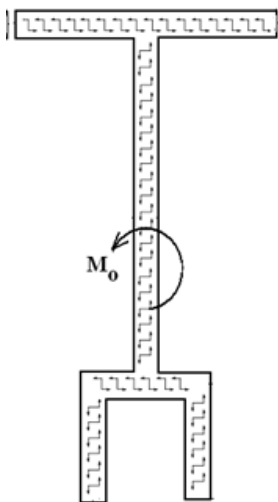


Рис. 49

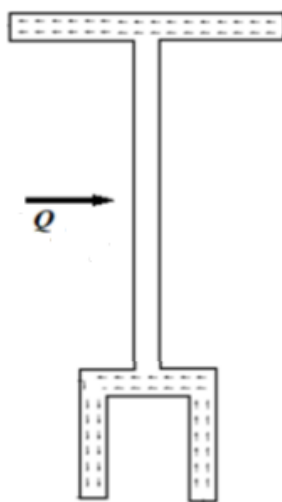


Рис. 50

**Расчет консольно закрепленного стержня при кручении.** Для консольной балки (одна грань жестко закреплена ( $z = 0$ ), другая – под нагрузкой ( $z = l$ )) проводится аналитический расчет нормальных и касательных напряжений. На свободный торец приложен внешний крутящий момент  $M_k = 0,1$  кН·м.

Распределение внутренних моментов чистого (свободного) ( $M_0$ ) и стесненного ( $M_\omega$ ) кручения по длине балки описывается соотношениями

$$M_f = M_\varepsilon \left(1 - \frac{\text{ch}K(l-z)}{\text{ch}Kl}\right), \quad M_\omega = M_\varepsilon \frac{\text{ch}K(l-z)}{\text{ch}Kl},$$

при  $z = l$   $M_f = M_\varepsilon \left(1 - \frac{1}{\text{ch}Kl}\right), \quad M_\omega = M_\varepsilon \frac{1}{\text{ch}Kl}.$

Нормальные напряжения при стесненном кручении:

$$\sigma = -\frac{M_\varepsilon}{KJ_{\omega_0}} \omega_f \frac{\text{sh}K(l-z)}{\text{ch}Kl}.$$

Гиперболические синус и косинус:

$$\text{sh}K(l-z) = 0,5(e^{K(l-z)} - e^{-K(l-z)}), \quad \text{ch}Kl = 0,5(e^{Kl} + e^{-Kl}).$$

При размерах поперечного сечения  $a = 0,1$  м;  $\delta = 0,01$  м получим  $K = 0,751 \cdot 10^{-2}$  см<sup>-1</sup>;  $J_{\omega_0} = 2,183 \cdot 10^5$  см<sup>6</sup>. Длина балки  $l = 2$  м.

Значения коэффициентов затухания краевых эффектов приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Z, см	0	20	40	80	120	160	180	200
$\frac{M_0}{M_\varepsilon} = 1 - \frac{\text{ch}K(l-z)}{\text{ch}Kl}$	0	0,125	0,231	0,391	0,497	0,556	0,571	0,576
$\frac{M_\omega}{M_\varepsilon} = \frac{\text{ch}K(l-z)}{\text{ch}Kl}$	1	0,875	0,769	0,609	0,503	0,444	0,429	0,424
$\frac{\text{sh}K(l-z)}{\text{ch}Kl}$	0,906	0,765	0,642	0,436	0,271	0,129	0,064	0

В плоскости заделки (при  $z = 0$ ) нормальные напряжения максимальны:

$$\sigma = -\frac{1000}{0,751 \cdot 2,183 \cdot 10^3} \omega_0 \frac{\text{sh}(1,502)}{\text{ch}(1,502)} = -0,553 \omega_0,$$



$\sigma_2 = -\sigma_3 = -6,6$  МПа,  $\sigma_8 = -\sigma_7 = -2,2$  МПа,  $\sigma_6 = -\sigma_5 = -5,0$  МПа.

Для численного решения был задействован пакет Ansys Workbench. Геометрическая модель показана на рис. 51, фрагмент конечно-элементной сетки – на рис. 52.

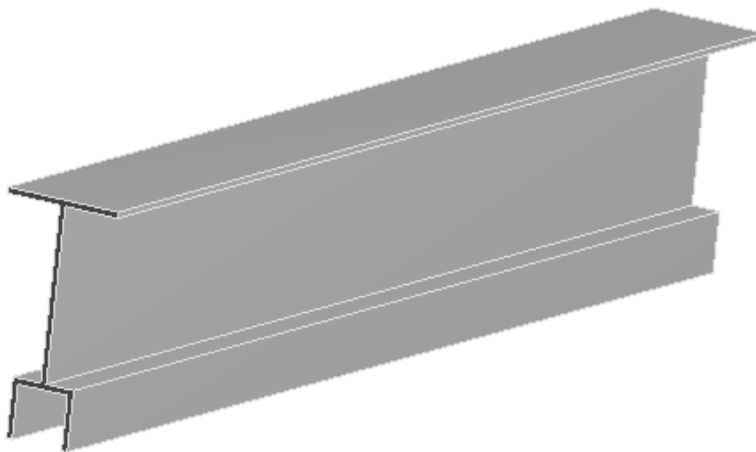


Рис. 51

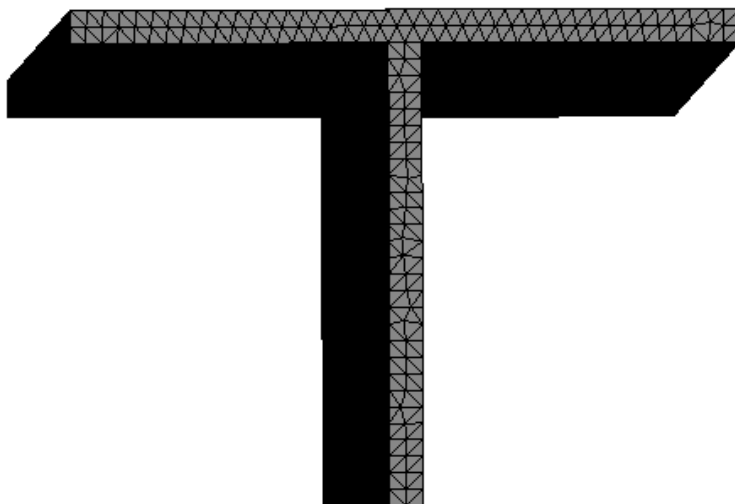


Рис. 52

На рис. 53 приведена линейризованная картина распределения нормальных напряжений по срединной линии 2-3 в плоскости заделки.

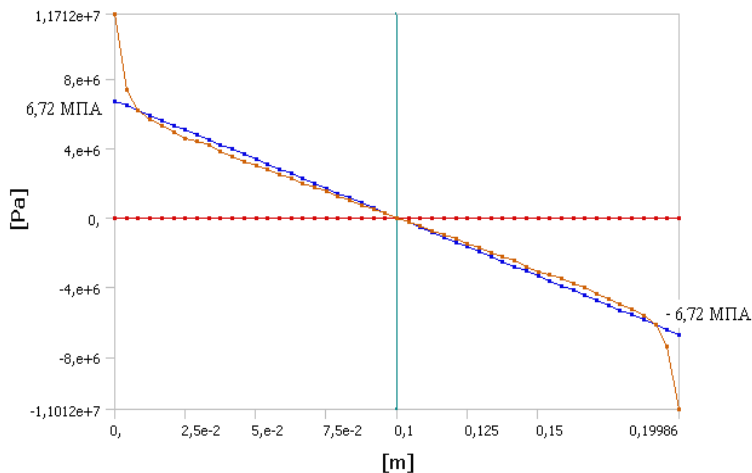
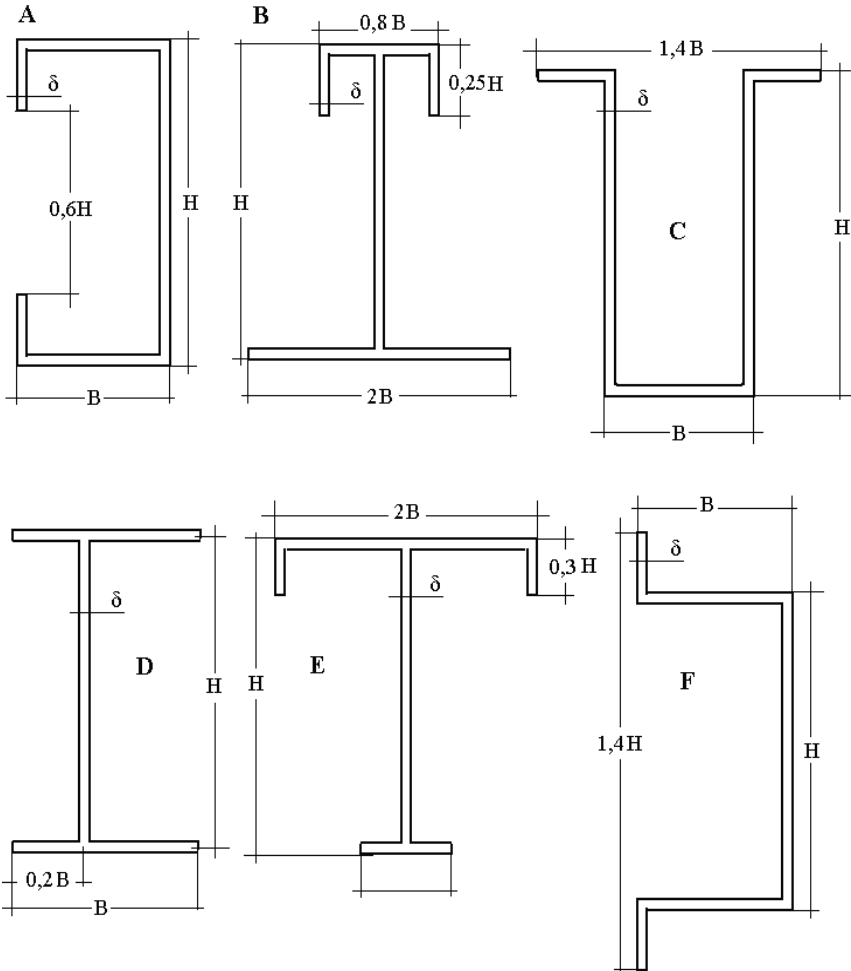


Рис. 53

Результаты численного расчета по нормальным напряжениям  $\sigma_2 = 6,7$  МПа,  $\sigma_7 = 2,1$  МПа,  $\sigma_5 = -5,2$  МПа, максимальное относительное различие с аналитическими результатами  $\sim 4,0\%$ .

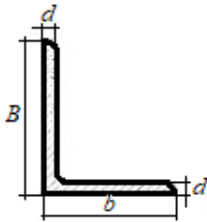
## 16. Варианты заданий РГР

### «Расчет стержней тонкостенного разомкнутого профиля»



№ варианта	Вид сечения	$H$ , см	$B$ , см	$\delta$ , см
1	A	24	30	1,0
2	B	32	40	1,2
3	C	40	44	1,4
4	D	28	36	1,6
5	E	24	30	1,8
6	F	32	40	2,0
7	A	36	48	1,4
8	B	34	44	1,6
9	C	32	42	1,8
10	D	40	44	2,0
11	E	46	44	1,0
12	F	28	36	1,2
13	A	24	30	1,6
14	B	40	46	1,8
15	C	42	48	2,0
16	D	28	48	1,0
17	E	24	32	1,2
18	F	46	40	1,4
19	A	44	42	2,0
20	B	40	40	1,0
21	C	28	36	1,2
22	D	30	32	1,4
23	E	30	42	1,6
24	F	28	36	1,8
25	A	32	38	1,2
26	B	44	36	1,4
27	C	42	38	1,6
28	D	28	36	1,8
29	E	34	38	2,0
30	F	38	44	1,0

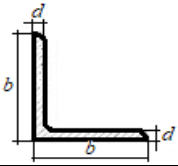
Приложение 1



Значения моментов инерции  $J_k$  при чистом кручении прокатных неравнобоких уголков (ГОСТ 8510-93)

Размеры, мм			$J_k, \text{см}^4$	Размеры, мм			$J_k, \text{см}^4$
$B$	$b$	$d$		$B$	$b$	$d$	
30	20	3	0,04230	100	75	12	9,389
		4	0,09813			8	3,277
35	20	4	0,1088	120	80	10	6,333
		5	0,2080			12	10,83
45	30	4	0,1515	130	90	8	3,618
		6	0,4968			10	7,000
60	40	5	0,3958			12	11,98
		6	0,6768			14	18,84
75	50	8	1,570	150	100	10	8,000
		5	0,5000			12	13,71
		6	0,8568			14	21,58
		8	1,997			16	31,95
80	55	10	3,833	180	120	12	16,59
		6	0,9288			14	26,15
		8	2,167			16	38,78
90	60	10	4,167	200	120	12	17,74
		6	1,037			14	27,98
		8	2,423			16	41,51
100	75	10	4,667	200	150	12	19,47
		8	2,850			16	45,60
		10	5,500			18	64,54
		20	88,00				

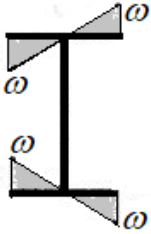
Приложение 2



Значения моментов инерции  $J_k$  при чистом кручении прокатных равнобоких уголков (ГОСТ 8509-93)

Размеры, мм		$J_k, \text{см}^4$	Размеры, мм		$J_k, \text{см}^4$
$b$	$d$		$b$	$d$	
20	3	0,03330	100	8	3,277
	4	0,07680		10	6,333
25	3	0,04230		12	10,83
	4	0,09813		14	17,01
30	4	0,1195		16	25,12
	5	0,2292		120	10
35	4	0,1408	12		13,13
	5	0,2708	14		20,67
40	4	0,1621	16		30,58
	5	0,3125	18	43,16	
	6	0,6328	130	10	8,333
45	4	0,1835		12	14,28
	5	0,3542		14	22,49
	6	0,6048		16	33,31
50	5	0,3958	150	12	16,59
	6	0,6768		14	26,15
60	5	0,4792		16	38,78
	6	0,8208		18	54,82
	8	1,911	20	74,67	
65	6	0,8928	180	14	31,64
	8	2,082		16	46,97
	10	4,000		18	66,48
75	6	1,037	200	16	52,43
	8	2,423		18	74,26
	10	4,667		20	101,3
	12	7,949		24	173,2
80	6	1,109	220	30	333,0
	8	2,594		16	57,89
	10	5,000		20	112,0
90	8	2,935	220	24	191,7
	10	5,667		28	301,5
	12	9,667	230	24	200,9
	14	15,18			

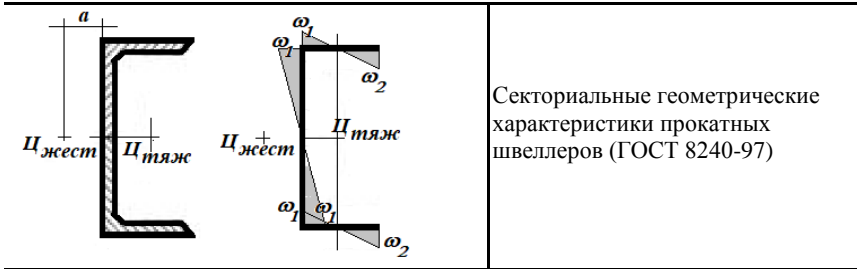
Приложение 3



Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров (ГОСТ 8239-97)

Номер профиля	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ , см <sup>6</sup>	Секториальная площадь для крайней точки профиля $\omega_{\max}$ , см <sup>2</sup>	Секториальный момент сопротивления $W_{\omega}$ , см <sup>4</sup>	Момент инерции при чистом кручении $J_{\kappa}$ , см <sup>4</sup>	Изгибно-крутильная характеристика $\alpha \sqrt{\frac{GJ_{\xi}}{EJ_{\omega}}}$ , см <sup>-1</sup>
10	644,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1353	20,10	67,33	4,243	0,03457
14	2560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4879	32,25	151,30	8,406	0,02562
18	8219	38,90	211,28	11,37	0,02295
20	13121	46,15	284,31	14,81	0,02074
20a	13857	47,05	284,50	17,85	0,02215
22	22773	55,91	407,33	20,32	0,01844
22a	23930	56,90	420,55	24,08	0,01958
24	33799	64,48	524,15	25,57	0,01698
24a	35426	65,57	540,25	30,12	0,01800
27	52987	76,68	690,99	31,93	0,01515
27a	55414	77,92	711,21	37,60	0,01608
30	76704	88,38	867,93	38,83	0,01389
30a	80114	89,75	892,60	45,78	0,01475
33	107160	100,69	1064,3	46,19	0,01281
33a	111780	102,21	1093,6	54,49	0,01363
36	154820	115,19	1344,0	56,85	0,01183
40	228900	134,13	1706,6	68,75	0,01070
45	376630	159,75	2357,6	95,31	0,009819
50	611990	187,10	3270,9	131,2	0,009038
55	906350	216,79	4180,8	159,9	0,008198
60	1349900	251,22	5373,4	195,5	0,007427

При вычислении  $\alpha$  приняты  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа.



Секториальные геометрические характеристики прокатных швеллеров (ГОСТ 8240-97)

Номер профиля	Координаты центра изгиба $a$ , см	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ , см <sup>6</sup>	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении $J_k$ , см <sup>4</sup>	Изгибно-крутильная характеристика $\alpha \sqrt{\frac{GJ_{\xi}}{EJ_{\omega}}}$ , см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ , см <sup>2</sup>	$\omega_2$ , см <sup>2</sup>	$W_{\omega_1}$ , см <sup>4</sup>	$W_{\omega_2}$ , см <sup>4</sup>		
5	1,08	24,91	2,70	4,26	9,22	5,85	1,350	0,14370
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,80	10,21	1,497	0,09375
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,20	1,940	0,07219
10	1,34	254,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245
14	1,58	1512	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483
14а	1,39	1711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,03730
16	1,68	2760	14,74	28,63	187,23	96,40	6,306	0,02950
16а	1,48	3099	14,03	30,09	220,87	103,00	8,227	0,03180
18	1,83	4745	17,68	35,32	268,41	134,34	8,128	0,02555
18а	1,57	5292	16,83	37,02	314,50	142,95	10,50	0,02749
20	1,94	7698	21,27	42,46	361,95	181,28	9,84	0,02207
20а	1,73	8560	20,24	44,45	422,87	192,57	12,50	0,02359
22	2,07	11593	24,84	49,60	466,69	233,73	11,66	0,01958
22а	1,86	12863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,60	0,02079
24	2,10	15326	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
24а	1,88	17007	26,10	57,75	651,56	394,50	16,47	0,01921
27	2,14	24337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01505
30	2,26	36645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
33	2,25	53630	41,39	88,54	1271,7	594,43	24,29	0,01326
36	2,47	92,189	49,50	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
40	2,43	148100	55,78	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,01240

При вычислении  $\alpha$  приняты  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  Мпа.



### ***Библиографический список***

1. *Строительная механика летательных аппаратов* / Под ред. И.Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1986 .
2. *Биргер И.А.*, Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
3. *Долинский В.Ф.*, Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. М.: Высшая школа, 1988 .

## О Г Л А В Л Е Н И Е

1. Тонкостенные стержни открытого и замкнутого профиля .....	3
2. Секториальная площадь поперечного сечения .....	7
3. Другие секториальные характеристики и их определение .....	8
4. Свободное кручение тонкостенных стержней .....	10
5. Стесненное кручение тонкостенных стержней .....	12
6. Дифференциальное уравнение стесненного кручения тонкостенных стержней .....	16
7. Касательные напряжения при поперечном изгибе стержней .....	19
8. Поперечный изгиб тонкостенных стержней .....	20
9. Определение положения центра тяжести поперечного сечения .....	22
10. Определение осевого момента инерции поперечного сечения .....	24
11. Построение эпюр текущих статических моментов (статических моментов отсеченных частей) поперечного сечения .....	26
12. Вычисление касательных напряжений в характерных точках контура при поперечном изгибе .....	30
13. Центр изгиба поперечного сечения открытого тонкостенного профиля .....	32
14. Пример определения центра жесткости методом фиктивной силы .....	36
15. Пример выполнения РГР «Расчет стержня тонкостенного профиля» .....	39
16. Варианты заданий РГР «Расчет стержней тонкостенного разомкнутого профиля» .....	50
П р и л о ж е н и е 1. Значения моментов инерции $J_k$ при чистом кручении прокатных неравнобоких уголков .....	52
П р и л о ж е н и е 2. Значения моментов инерции $J_k$ при чистом кручении прокатных равнобоких уголков .....	53
П р и л о ж е н и е 3. Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров .....	54
П р и л о ж е н и е 4. Секториальные геометрические характеристики прокатных швеллеров .....	55
<i>Библиографический список</i> .....	56

*Каратушин Станислав Иванович, Титух Игорь Николаевич*

### **Тонкостенные стержни**

Редактор *Г.М. Звягина*

Корректор *Л.А. Петрова*

Компьютерная верстка: *С.В. Кашиба*

Подписано в печать 11.08..2020. Формат 60x84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ № 106.

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1