

ББК 22.161я73

З 33

Запорожец Г. И.

З 33 Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. — 8-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 464 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0912-9

«Руководство» содержит задачи по темам: производная и дифференциал функции, исследование функций и построение их графиков, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции многих переменных, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы теории поля, ряды, дифференциальные уравнения.

Приведены подробные примерные решения типичных задач, а также необходимые теоретические сведения. Особенность данного задачника — изложение материала, позволяющее использовать его для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов технических и технологических направлений подготовки и специальностей вузов.

ББК 22.161я73

Оформление обложки

А. ЛАПШИН

Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2014

© Г. И. Запорожец,  
наследники, 2014

© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Глава I. Введение в анализ . . . . .	7
§ 1. Переменные величины и функции, их обозначение . . . . .	7
§ 2. Область определения (существования) функции . . . . .	12
§ 3. Построение графика функции по точкам . . . . .	14
§ 4. Построение графика функции путем сдвига и деформации известного графика другой функции . . . . .	20
§ 5. Переменная как упорядоченное числовое множество. Предел переменной. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел функции . . . . .	23
§ 6. Теоремы о бесконечно малых и о пределах . . . . .	30
§ 7. Вычисление пределов . . . . .	33
§ 8. Смешанные задачи на нахождение пределов . . . . .	45
§ 9. Сравнение бесконечно малых . . . . .	46
§ 10. Непрерывность и точки разрыва функции . . . . .	48
Глава II. Производная и дифференциал функции . . . . .	57
§ 1. Производная функции и ее геометрическое значение. Непосредственное нахождение производной . . . . .	57
§ 2. Производные простейших алгебраических и тригонометрических функций . . . . .	60
§ 3. Производная сложной функции . . . . .	63
§ 4. Производные показательных и логарифмических функций . . . . .	66
§ 5. Производные обратных тригонометрических функций . . . . .	67
§ 6. Смешанные задачи на дифференцирование . . . . .	69
§ 7. Логарифмическое дифференцирование . . . . .	71
§ 8. Производные высших порядков . . . . .	73
§ 9. Производные неявной функции . . . . .	75
§ 10. Производные от функции, заданной параметрически . . . . .	78
§ 11. Касательная и нормаль к плоской кривой. Угол между двумя кривыми . . . . .	79
§ 12. Скорость изменения переменной величины. Скорость и ускорение прямолинейного движения . . . . .	85
§ 13. Дифференциал функции . . . . .	88
§ 14. Вектор-функция скалярного аргумента и ее дифференцирование. Касательная к пространственной кривой . . . . .	90
§ 15. Скорость и ускорение криволинейного движения . . . . .	93
Глава III. Исследование функций и построение их графиков . . . . .	95
§ 1. Теорема (формула) Тейлора . . . . .	95
§ 2. Правило Лопиталя и применение его к нахождению предела функции . . . . .	105
§ 3. Возрастание и убывание функции . . . . .	110
§ 4. Максимум и минимум (экстремум) функции . . . . .	111
§ 5. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	118
§ 6. Задачи о наибольших или наименьших значениях величин . . . . .	121
§ 7. Направление выпуклости кривой и точки перегиба . . . . .	127
§ 8. Асимптоты . . . . .	130



§ 9.	Общая схема исследования функций и построения их графиков . . . . .	134
§ 10.	Приближенное решение уравнений . . . . .	144
§ 11.	Кривизна плоской кривой . . . . .	149
<b>Глава IV.</b>	<b>Неопределенный интеграл . . . . .</b>	<b>154</b>
§ 1.	Первообразная функции и неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования . . . . .	154
§ 2.	Интегрирование посредством разложения подынтегральной функции на слагаемые . . . . .	159
§ 3.	Интегрирование посредством замены переменной . . . . .	161
§ 4.	Интегрирование по частям . . . . .	163
§ 5.	Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен . . . . .	166
	$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx; \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx; \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$	
§ 6.	Интегрирование тригонометрических функций . . . . .	170
§ 7.	Интегрирование рациональных функций . . . . .	173
§ 8.	Интегрирование некоторых иррациональных функций . . . . .	178
§ 9.	Интегрирование некоторых трансцендентных (неалгебраических) функций . . . . .	182
§ 10.	Смешанные задачи на интегрирование . . . . .	183
<b>Глава V.</b>	<b>Определенный интеграл . . . . .</b>	<b>184</b>
§ 1.	Определенный интеграл как предел интегральных сумм, его свойства и связь с неопределенным интегралом . . . . .	184
§ 2.	Замена переменной в определенном интеграле . . . . .	186
§ 3.	Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Площадь плоской фигуры . . . . .	189
§ 4.	Объем тела по площадям его параллельных сечений . . . . .	196
§ 5.	Объем тела вращения . . . . .	199
§ 6.	Длина дуги плоской кривой . . . . .	202
§ 7.	Площадь поверхности вращения . . . . .	205
§ 8.	Физические задачи . . . . .	209
§ 9.	Координаты центра тяжести . . . . .	223
§ 10.	Несобственные интегралы . . . . .	225
§ 11.	Приближенное вычисление определенных интегралов . . . . .	230
<b>Глава VI.</b>	<b>Функции многих переменных . . . . .</b>	<b>236</b>
§ 1.	Функции многих переменных, их обозначение и область определения . . . . .	236
§ 2.	Предел функции многих переменных. Непрерывность . . . . .	239
§ 3.	Частные производные функции многих переменных . . . . .	241
§ 4.	Дифференциалы функции многих переменных . . . . .	243
§ 5.	Дифференцирование сложных функций . . . . .	246
§ 6.	Дифференцирование неявных функций . . . . .	248
§ 7.	Частные производные высших порядков . . . . .	249
§ 8.	Касательная плоскость и нормаль к поверхности . . . . .	252
§ 9.	Экстремум функции многих переменных . . . . .	254
§ 10.	Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	256
<b>Глава VII.</b>	<b>Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы . . . . .</b>	<b>261</b>
§ 1.	Двойной интеграл, его вычисление двукратным интегрированием . . . . .	262
§ 2.	Двойной интеграл в полярных координатах . . . . .	271
§ 3.	Вычисление площади посредством двойного интеграла . . . . .	274
§ 4.	Вычисление объема тела . . . . .	277

§ 5.	Масса, центр тяжести и моменты инерции . . . . .	281
§ 6.	Тройной интеграл, его вычисление трехкратным интегрированием . . . . .	286
§ 7.	Вычисление величин посредством тройного интеграла . . . . .	293
§ 8.	Криволинейные интегралы, их вычисление и условия независимости от линии интегрирования . . . . .	301
§ 9.	Вычисление величин посредством криволинейных интегралов . . . . .	307
§ 10.	Нахождение функции по ее полному дифференциалу . . . . .	311
§ 11.	Интегралы по поверхности, их вычисление сведением к двойным интегралам . . . . .	313
§ 12.	Вычисление величин посредством поверхностных интегралов . . . . .	322
<b>Глава VIII.</b>	<b>Элементы теории поля . . . . .</b>	<b>328</b>
§ 1.	Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент . . . . .	328
§ 2.	Векторное поле. Поток и дивергенция поля . . . . .	333
§ 3.	Циркуляция и вихрь векторного поля . . . . .	338
<b>Глава IX.</b>	<b>Ряды . . . . .</b>	<b>342</b>
§ 1.	Числовые ряды сходящиеся и расходящиеся. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами . . . . .	342
§ 2.	Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакочередующегося ряда . . . . .	347
§ 3.	Функциональные ряды . . . . .	350
§ 4.	Ряды Тейлора . . . . .	354
§ 5.	Действия со степенными рядами. Применение рядов к приближенным вычислениям . . . . .	358
§ 6.	Числовые и степенные ряды с комплексными членами . . . . .	365
§ 7.	Ряды Фурье . . . . .	369
§ 8.	Интеграл Фурье . . . . .	382
<b>Глава X.</b>	<b>Дифференциальные уравнения . . . . .</b>	<b>386</b>
§ 1.	Дифференциальные уравнения, их порядок, общий и частные интегралы . . . . .	386
§ 2.	Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	389
§ 3.	Однородные уравнения первого порядка . . . . .	391
§ 4.	Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли . . . . .	393
§ 5.	Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	396
§ 6.	Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка . . . . .	397
§ 7.	Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами . . . . .	400
§ 8.	Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами . . . . .	403
§ 9.	Смешанные задачи на интегрирование уравнений разных типов . . . . .	411
§ 10.	Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	411
§ 11.	Метод Эйлера приближенного интегрирования уравнений первого порядка . . . . .	425
§ 12.	Интегрирование уравнений при помощи рядов . . . . .	427
§ 13.	Системы линейных дифференциальных уравнений . . . . .	431
§ 14.	Уравнения математической физики . . . . .	435
<b>Ответы . . . . .</b>		<b>443</b>