

44. Сусси И. Р., Фридман В. М. Колебания и уравнивание вала с распределенными параметрами на анизотропных упруго-демпферных опорах // *Машиноведение*. 1977. № 6. С. 24—31.
45. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
46. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
47. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
48. Фридман В. М. Об одном приближенном методе определения частот колебаний // Колебания в турбомашинах: Сб. научн. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 69—76.
49. Фридман В. М. Новые методы решения линейного операторного уравнения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128, № 3. С. 482—484.
50. Фридман В. М. Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 5. С. 1063—1066.
51. Фридман В. М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска // Успехи мат. наук. 1962. Т. XVII. Вып. 3 (195). С. 201—204.
52. Фридман В. М. Видоизменение метода Галеркина в задаче о совместных колебаниях турбинного диска и лопаток // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин. 1964. № 235. С. 24—32.
53. Фридман В. М. Изгибные колебания пакета естественно закрученных стержней в поле центробежных сил // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Динамика и прочность машин. 1965. № 252. С. 87—94.
54. Фридман В. М., Чернина В. С. Видоизмененный метод Галеркина—Ритца, связанный со смешанным принципом в теории упругости // Мех. тверд. тела. 1969. № 1. С. 64—78.
55. Фридман В. М., Питтель Б. Г. О сходимости итерационного процесса с минимальными ошибками // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. Механика и процессы управления. 1969. № 307. С. 182—188.
56. Cauchy A. *Comptes Rendus*, 25, 1847.
57. Fridman V. Functional methods applied to the problems of non-linear periodic oscillation // Pergamon press. 1969. P. 373—387.
58. Fridman V. Nonlinear problems of power machine dynamics // International Symposium. The active control of vibration. London, 1994. P. 179—187.
59. Kutta W. Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen // *Z. Math. Phys.* 1901. Bd. 46. S. 435—453.
60. Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // *J. reine und angew. Math. (Grelle)*. 1909. Bd. 135, N 1. S. 1—61.
61. Runge C. Über die numerische Ausflosung von Differentialgleichungen // *Mathematische Annales*. 1895. Bd. 46. S. 167—178.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>ЧАСТЬ 1. УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ</b>	
<b>Глава 1. Уравнения колебаний стержня с прямолинейной осью . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1. Дифференциальные уравнения продольных колебаний стержня . . . . .	6
1.2. Дифференциальные уравнения продольных колебаний стержня в операторной форме . . . . .	10
1.3. Дифференциальные уравнения крутильных колебаний . . . . .	13
1.4. Дифференциальные уравнения поперечных колебаний прямолинейного стержня . . . . .	15
1.5. Дифференциальные уравнения поперечных колебаний стержня в операторной форме . . . . .	18
1.6. Совместные продольные, крутильные и поперечные колебания стержня . . . . .	21
1.7. Дифференциальные уравнения в перемещениях и в усилиях . . . . .	23
1.8. Интегральные уравнения продольных и крутильных колебаний . . . . .	27
1.9. Интегральные уравнения поперечных колебаний стержня . . . . .	31
1.10. Уравнения в перемещениях с интегральными операторами . . . . .	33
1.11. Приведение уравнений с дифференциальными и интегральными операторами к классическому виду . . . . .	35
1.12. Интегральные уравнения гармонических колебаний для незакрепленного упругого тела . . . . .	43
<b>Глава 2. Колебания трехмерного тела, пластины и кольца . . . . .</b>	<b>45</b>
2.1. Уравнения колебаний трехмерного тела . . . . .	45
2.2. Уравнения колебаний пластины . . . . .	50
2.3. Уравнения колебаний кольца . . . . .	55

<b>Глава 3. Спектральная теория</b>	58
3.1. Формы и частоты свободных колебаний	58
3.2. Представление амплитуды вынужденных гармонических колебаний в виде ряда по формам свободных колебаний	63
3.3. Приведение уравнений к классическому виду	67
3.4. Стационарные (периодические) и нестационарные упругие колебания	69
3.5. Колебания с заданными начальными условиями	69
3.6. Периодические колебания	72
3.7. Колебания стержня при действии сосредоточенной силы	73
3.8. Итерационный метод определения первой формы и частоты свободных упругих колебаний	77
3.9. Определение высших форм и частот свободных колебаний	82
<b>Глава 4. Вариационные и проекционные методы решения уравнений теории колебаний</b>	85
4.1. Вариационный принцип в задаче о вынужденных гармонических колебаниях для уравнения в перемещениях	86
4.2. Вариационный принцип в задаче о свободных гармонических колебаниях для уравнения в перемещениях с дифференциальным оператором	88
4.3. Экстремальный вариационный принцип в задаче о вынужденных гармонических колебаниях	89
4.4. Смешанный вариационный принцип в задаче о вынужденных гармонических колебаниях (принцип Рейсснера)	91
4.5. Вариационный принцип в задаче о вынужденных гармонических колебаниях для уравнения в перемещениях с интегральным оператором	93
4.6. Вариационный принцип в задаче о нестационарных колебаниях	93
4.7. Реономное варьирование	94
4.8. Вариационный метод решения уравнений теории колебаний в перемещениях	95
4.9. Приближенный метод решения задачи о гармонических колебаниях, основанный на смешанном вариационном принципе	99
4.10. Формулы первого приближения для первой частоты свободных колебаний. Формулы Рэлея и Ритца	101
4.11. Вариационно-разностный метод в задаче о продольных колебаниях стержня. Свободные колебания	105
4.12. Вариационно-разностный метод. Вынужденные гармонические колебания	110
4.13. Вынужденные гармонические колебания при наличии трения	112
4.14. Смешанный вариационный принцип при сложных граничных условиях	114

<b>Глава 5. Гармонический анализ</b>	117
5.1. Периодические колебания	118
5.2. Гармонический анализ и спектральный метод	120
5.3. Гармонический анализ и вариационно-разностный метод	122
5.4. Периодические колебания. Зависимость операторов уравнения от времени	123
5.5. Нестационарные колебания и гармонический анализ	124
5.6. Колебания, близкие к периодическим	127
<b>Глава 6. Разрывные функции. Сложные граничные условия</b>	132
6.1. Продольные колебания прямолинейного стержня	132
6.2. Спектральный метод, использующий простые однородные граничные условия	137
6.3. Колебания трехмерного тела. Смешанные граничные условия	144
<b>Глава 7. Точные решения уравнений теории колебаний</b>	150
7.1. Поперечные колебания прямолинейного стержня	150
7.2. Свободные колебания кольца постоянного поперечного сечения	165
7.3. Свободные колебания круглой пластины	169
7.4. Колебания прямоугольной пластины	179
7.5. Свободные колебания сферической оболочки	185
<b>Глава 8. Нелинейные периодические колебания</b>	190
8.1. Периодические колебания тонкого стержня, лежащего на нелинейном упругом основании	190
8.2. Метод Ньютона—Канторовича для решения нелинейных операторных уравнений	193
8.3. Итерационный градиентный метод решения операторных уравнений	195
8.4. Нелинейные колебания, близкие к периодическим	198
<b>ЧАСТЬ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ</b>	
<b>Глава 9. Определение упруго-демпферных характеристик подшипников скольжения</b>	201
9.1. Гидродинамическая теория смазки	201
9.2. Теория масляного клина	204
9.3. Цилиндрический подшипник скольжения	208
<b>Глава 10. Колебания валов, лопаток и дисков</b>	213
10.1. Изгибные колебания вращающегося вала на шарнирных опорах под действием неуравновешенных центробежных сил	213
10.2. Изгибные колебания неуравновешенного вращающегося вала на упругих изотропных опорах	216
10.3. Изгибные колебания неуравновешенного вращающегося вала на изотропных упруго-демпферных опорах	221

10.4. Изгибные колебания неуравновешенного вращающегося вала на анизотропных упруго-демпферных опорах . . . . .	222
10.5. Параметрические колебания вала с двойкой изгибной жесткостью . . . . .	224
10.6. Колебания лопатки паровой турбины в поле центробежных сил . . . . .	227
10.7. Совместные колебания диска и лопаток ротора турбины . . . . .	229
<b>Глава 11. Устойчивость положения равновесия оси вращающегося вала . . . . .</b>	<b>233</b>
<b>Приложение. Операторная запись уравнений теории упругости и краевых условий в криволинейных координатах . . .</b>	<b>241</b>
Литература . . . . .	248

*Научное издание*

**Владимир Маркович Фридман**

**ТЕОРИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ.  
УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ**

Редактор издательства *М. В. Орлова*  
Художник *П. Палей*  
Технический редактор *О. В. Новикова*  
Компьютерная верстка *Л. Н. Напольской*

Подписано к печати 26.05.14. Формат 60 × 90 1/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 16.0. Уч.-изд. л. 9.1. Тираж 500 экз. Тип. зак. № 3179

Санкт-Петербургская издательско-книготорговая фирма «Наука»  
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1  
E-mail: [main@nauka.nw.ru](mailto:main@nauka.nw.ru)  
Internet: [www.naukaspb.com](http://www.naukaspb.com)

Первая Академическая типография «Наука»  
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-02-038375-3



9 785020 1383753