

## О ГЛАВЛЕНИЕ

|  |    |
|--|----|
| <b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>  | 3  |
| <b>1. ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....</b>                      | 4  |
| 1.1. Обозначения матриц и матричных операций .....                       | 4  |
| 1.2. Понятие о методе конечных элементов .....                           | 5  |
| <b>2. РАСЧЁТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МКЭ .....</b>                             | 7  |
| 2.1. Закон Гука для внешних сил.....                                     | 7  |
| 2.2. Основные положения расчёта.....                                     | 9  |
| 2.2.1. Основная идея расчёта .....                                       | 9  |
| 2.2.2. Матрица жесткости плоского стержневого элемента .....             | 11 |
| 2.2.3. Матрица жесткости произвольно ориентированного элемента ..        | 12 |
| 2.2.4. Матрица индексов .....  | 15 |
| 2.2.5. Матрица жесткости стержневой системы .....                        | 17 |
| 2.2.6. Формирование вектора сил системы .....                            | 18 |
| 2.2.7. Учет граничных условий .....                                      | 20 |
| 2.2.8. Решение основного уравнения МКЭ .....                             | 22 |
| 2.2.9. Дополнительные расчёты.....                                       | 22 |
| 2.2.10. Функции формы.....   | 24 |
| 2.2.11. Порядок расчета стержневой системы матричным методом .....       | 26 |
| <b>3. ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....</b>                | 27 |
| 3.1. Потенциальная энергия упругой деформации.....                       | 28 |
| 3.2. Уравнение движения системы с $n$ степенями свободы.....             | 29 |
| 3.3. Определение матрицы масс $[M]$ и матрицы демпфирования $[H]$ .....  | 30 |
| 3.4. Определение собственных частот системы с $n$ степенями свободы..... | 34 |
| 3.5. Вынужденные колебания системы с $n$ степенями свободы .....         | 36 |
| 3.6. Устойчивость стержневых систем.....                                 | 38 |
| <b>4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ПЛОСКИХ И ОБЪЁМНЫХ ТЕЛ ..</b>         | 41 |
| 4.1. Тензоры и векторы напряжений и деформаций .....                     | 41 |
| 4.2. Целевая функция для плоских и объёмных тел.....                     | 44 |
| <b>5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....</b>                      | 47 |
| 5.1. Теория деформаций .....   | 48 |
| 5.1.1. Геометрические уравнения Коши.....                                | 49 |
| 5.1.2. Тензор деформаций.....  | 50 |
| 5.1.3. Уравнения неразрывности .....                                     | 51 |
| 5.2. Теория напряжений .....   | 52 |
| 5.2.1. Равновесие элементарного тетраэдра. Тензор напряжений .....       | 52 |
| 5.2.2. Дифференциальные уравнения равновесия Навье .....                 | 54 |
| 5.2.3. Матричный дифференциальный оператор .....                         | 56 |
| 5.2.4. Главные напряжения и главные деформации .....                     | 59 |
| 5.3. Связь между напряжениями и деформациями .....                       | 62 |
| 5.4. Виды напряженного состояния.....                                    | 66 |
| 5.5. Уравнения теории упругости для частных случаев нагружения .....     | 69 |
| 5.5.1. Плоское напряженное состояние .....                               | 69 |
| 5.5.2. Плоское деформированное состояние .....                           | 70 |
| 5.5.3. Осьсимметричное нагружение .....                                  | 70 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>6. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЁТА ПЛОСКИХ И ОБЪЁМНЫХ ТЕЛ.....</b>            | <b>71</b>  |
| 6.1. Формирование матрицы жесткости элемента.....                                     | 71         |
| 6.2. Требования к функциям формы.....   | 72         |
| 6.3. Определение функций формы треугольного элемента .....                            | 74         |
| 6.4. Матрица жесткости треугольного элемента .....                                    | 76         |
| 6.5. Порядок решения плоской задачи теории упругости методом конечных элементов ..... | 78         |
| 6.6. Использование сложных конечных элементов.....                                    | 80         |
| 6.6.1. Виды элементов .....   | 80         |
| 6.6.2. Функции формы сложных элементов .....  | 81         |
| 6.6.3. Естественная система координат.....  | 81         |
| 6.6.4. Расчет коэффициентов жесткости .....   | 83         |
| 6.6.5. Использование четырехугольного квадратичного элемента .....                    | 84         |
| 6.6.7. Сравнение линейной и квадратичной функций формы .....                          | 87         |
| <b>7. ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МКЭ НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА .....</b>        | <b>89</b>  |
| 7.1. Кручение стержня произвольного поперечного сечения.....                          | 90         |
| 7.2. Общий подход к решению задач методом конечных элементов .....                    | 91         |
| 7.3. Решение уравнения Пуассона методом конечных элементов .....                      | 93         |
| <b>8. УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА.....</b>  | <b>97</b>  |
| 8.1. Основные законы теории пластичности.....   | 98         |
| 8.1.1. Законы упругого изменения объема и формы тела .....                            | 98         |
| 8.1.2. Законы теории пластичности .....   | 100        |
| 8.2. Условие пластичности .....   | 105        |
| 8.3. Физические уравнения теории пластичности .....                                   | 106        |
| 8.4. Решение упругопластической задачи МКЭ .....                                      | 107        |
| <b>9. РАСЧЁТ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....</b>                       | <b>113</b> |
| 9.1. Кривые ползучести.....   | 114        |
| 9.2. Характеристики ползучести .....  | 118        |
| 9.3. Расчёт на ползучесть методом конечных элементов.....                             | 119        |
| <b>10. РАСЧЁТЫ В ANSYS .....</b>  | <b>120</b> |
| 10.1. Структура ANSYS и последовательность расчета .....                              | 120        |
| 10.2. Примеры.....  | 121        |
| <b>Библиографический список.....</b>  | <b>134</b> |

*Макаров Евгений Георгиевич*

### Метод конечных элементов в прочностных расчетах

Редактор Г.В. Никитина

Корректор Л.А. Петрова

Компьютерная верстка С.В. Кашиба

Подписано в печать 14.08.2017. Формат 60x84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. 8 л. Тираж 100 экз. Заказ № 122.

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1