

Содержание

Предисловие	13
Часть I ДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	19
Глава 1. Примеры динамических систем, формулировка задач	20
1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)	20
1.1.1. Частицы в поле случайных скоростей	20
1.1.2. Частица в поле случайных внешних сил	25
1.1.3. Явление переброса в динамических системах	26
1.1.4. Осциллятор с переменной случайной частотой (стохастический параметрический резонанс)	35
1.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (краевые задачи)	36
1.2.1. Плоские волны в слоистых средах (падение волны на слой среды)	36
1.2.2. Плоские волны в слоистых средах (источник внутри слоя среды)	42
1.2.3. Плоские волны в слоистых средах (двухслойная модель среды)	44
1.3. Уравнения в частных производных первого порядка	45
1.3.1. Линейные уравнения с производными первого порядка	45
1.3.2. Квазилинейные уравнения	55
1.3.3. Краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений	59
1.3.4. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка	60
1.4. Уравнения в частных производных старшего порядка	61
1.4.1. Фундаментальные решения волновых задач в свободном пространстве и в слоистых средах	61
1.4.2. Уравнения Максвелла для стационарной задачи	67
1.4.3. Уравнение Гельмгольца (краевая задача) и параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах) ..	68
1.4.4. Уравнение Навье–Стокса (случайные силы в гидродинамической теории турбулентности)	74
1.4.5. Уравнения геофизической гидродинамики	84
Глава 2. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнений, начальных условий и параметров	86
2.1. Функциональная зависимость решения задачи	86
2.1.1. Вариационные (функциональные) производные	86

2.1.2. Принцип динамической причинности	90
2.2. Зависимость решения от параметров задачи	91
2.2.1. Зависимость решения задачи от начального условия	91
2.2.2. Метод погружения для краевых задач	93
Глава 3. Индикаторная функция и уравнение Лиувилля	96
3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	96
3.2. Уравнения в частных производных первого порядка	99
3.2.1. Случай линейного уравнения	99
3.2.2. Случай квазилинейного уравнения	104
3.2.3. Общий случай нелинейного уравнения	108
3.3. Уравнения в частных производных высшего порядка	108
3.3.1. Параболическое уравнение квазиоптики	108
3.3.2. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности	111
Часть II СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПРОЦЕССЫ И ПОЛЯ 113	
Глава 4. Случайные величины и их характеристики	114
Глава 5. Случайные процессы и их характеристики	120
5.1. Общие замечания	120
5.1.1. Кривая типичной реализации случайного процесса	122
5.1.2. Статистика числа точек пересечения процесса с прямой	123
5.2. Гауссов случайный процесс	124
5.3. Логарифмически нормальный случайный процесс	125
5.4. Разрывные случайные процессы	126
5.4.1. Пуассоновский (импульсный) случайный процесс	127
5.4.2. Телеграфный случайный процесс	129
5.4.3. Обобщенный телеграфный процесс	133
5.5. Марковские процессы	134
5.5.1. Общие свойства	134
5.5.2. Характеристический функционал марковского процесса	142
Глава 6. Случайные поля и их характеристики	145
6.1. Гауссово векторное случайное поле	146
6.2. Статистическая топография случайных процессов и полей	149
6.3. О критерии стохастического структурообразования в случайных средах	151
Глава 7. Расщепление корреляций	154
7.1. Общие соотношения	154
7.2. Гауссов процесс	156
7.3. Гауссовы случайные поля	158
7.4. Пуассоновский процесс	160
7.5. Телеграфный случайный процесс	160
7.6. Обобщенный телеграфный процесс	164
7.7. Марковские процессы общего типа	165
7.8. Дельта-коррелированные случайные процессы	168
7.8.1. Общие соотношения	168
7.8.2. Асимптотический смысл дельта-коррелированных процессов и полей	170

Часть III	СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	177
Глава 8.	Общие подходы к стохастическим динамическим системам	178
8.1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	178
8.2.	Уравнения в частных производных	182
8.2.1.	Поле плотности в случайном поле скоростей	182
8.2.2.	Уравнение квазиоптики	184
8.2.3.	Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности	185
8.3.	Стохастические интегральные уравнения	186
8.3.1.	Линейные интегральные уравнения	187
8.3.2.	Нелинейные интегральные уравнения	193
8.4.	Динамические системы, допускающие полный статистический анализ	199
8.4.1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	199
8.4.2.	Примеры уравнений в частных производных	210
8.5.	Дельта-коррелированные процессы и поля	215
8.5.1.	Общие соотношения	215
8.5.2.	Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение	217
8.5.3.	Линейное операторное уравнение	220
8.5.4.	Уравнения в частных производных	227
Глава 9.	Стохастические уравнения с марковскими флуктуациями параметров	235
9.1.	Общие соотношения	235
9.2.	Телеграфный случайный процесс	236
9.2.1.	Система линейных операторных уравнений	237
9.2.2.	Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение	242
9.2.3.	Частица в одномерном потенциальном поле	243
9.2.4.	Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка	245
9.2.5.	Статистическая интерпретация телеграфного уравнения	246
9.3.	Обобщенный телеграфный случайный процесс	246
9.3.1.	Стохастическое линейное уравнение	248
9.3.2.	Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение	251
9.3.3.	Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка	253
9.4.	Гауссовы марковские процессы	254
9.4.1.	Общие соотношения	254
9.4.2.	Стохастическое линейное уравнение	255
9.4.3.	Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка	255
9.4.4.	Квадрат гауссова марковского процесса	258
9.5.	Марковские процессы с конечным числом состояний	259
9.5.1.	Процесс с двумя состояниями	260
9.6.	Стохастические причинные интегральные уравнения	261
9.6.1.	Общие соотношения	261
9.6.2.	Телеграфный случайный процесс	263
9.6.3.	Обобщенный телеграфный случайный процесс	264
9.6.4.	Гауссов марковский процесс	266

Часть IV АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	271
Глава 10. Приближение дельта-коррелированного гауссова случайного поля	272
10.1. Уравнение Фоккера–Планка	272
10.2. Плотность вероятностей перехода	274
10.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка	277
10.3.1. Уравнение Ланжевена	277
10.4. Простейшие марковские случайные процессы	280
10.4.1. Линейные системы уравнений	281
10.4.2. Винеровский случайный процесс	281
10.4.3. Винеровский случайный процесс со сносом	283
10.4.4. Логарифмически нормальные процессы, перемежаемость, кривая типичной реализации и динамическая локализация	285
10.5. Логнормальные поля, перемежаемость, статистическая топография и кластеризация	294
10.5.1. Случайные логнормальные поля	294
10.5.2. Статистическая топография логнормальных случайных полей	295
10.6. Причинное во времени интегральное уравнение	298
10.6.1. Общие замечания	298
10.6.2. Статистическое усреднение	300
Глава 11. О методах решения и анализа уравнения Фоккера–Планка	304
11.1. Интегральные преобразования	304
11.2. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка	306
11.2.1. Одномерное нелинейное уравнение	306
11.2.2. Гамильтоновы системы	307
11.2.3. Системы гидродинамического типа	309
11.3. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (явление переброса)	316
11.3.1. Явление переброса в регулярных системах	316
11.3.2. Явление переброса в сингулярных системах	319
11.4. Асимптотические и приближенные методы решения уравнения Фоккера–Планка	322
11.4.1. Асимптотическое разложение	322
11.4.2. Метод кумулянтных разложений	323
11.4.3. Метод усреднения по быстрым осцилляциям	324
Глава 12. Диффузионное и высшие приближения	334
12.1. Общие соотношения	334
12.2. Диффузионное приближение	335
12.2.1. Частица в поле случайных сил	335
12.3. Высшие приближения, метод последовательных приближений	339
12.3.1. Диффузия частиц в быстропеременных случайных волновых полях	340

Часть V	НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ	345
Глава 13.	О квазиупругих свойствах несжимаемой турбулентной среды ..	346
Глава 14.	Излучение звука вихревыми движениями	351
14.1.	Излучение звука вихревыми нитями	352
14.2.	Излучение звука вихревыми кольцами	355
Глава 15.	Равновесные распределения для гидродинамических потоков ..	359
Часть VI	ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В СЛУЧАЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ	369
Глава 16.	Основные особенности задачи и определяющие уравнения ...	370
16.1.	Малоинерционная примесь	370
16.2.	Безынерционная примесь	372
16.2.1.	Связь лагранжева и эйлера описаний	373
Глава 17.	Статистический анализ диффузии и кластеризации безынерционной примеси	380
17.1.	Общие замечания	380
17.2.	Приближение дельта-коррелированного во времени поля скоростей ...	382
17.2.1.	Лагранжево описание (диффузия частиц)	383
17.2.2.	Вероятностное описание поля плотности в случайном поле скоростей (Эйлерово описание)	391
17.3.	Учет дополнительных факторов	398
17.3.1.	Плоско-параллельный средний поток	398
17.3.2.	Учет молекулярной диффузии	400
17.3.3.	Условия применимости дельта-коррелированного приближения	403
17.3.4.	Диффузионное приближение	404
17.4.	Особенности диффузии примеси в случайных волновых полях	407
17.4.1.	Статистическое описание	409
Глава 18.	Интегральные одноточечные статистические характеристики, связанные с полем плотности	414
18.1.	Пространственная корреляционная функция поля плотности	415
18.2.	Одноточечные статистические характеристики градиента поля плотности	417
18.2.1.	Обобщение на случай неоднородных начальных условий	420
Глава 19.	Диффузия и кластеризация примеси в случайных бездивергентных потоках	422
19.1.	Диффузия и кластеризация плавучей безынерционной примеси	422
19.1.1.	Плавучая примесь на случайной поверхности $z(\mathbf{R}, t)$	423
19.2.	Диффузия и кластеризация малоинерционной примеси	425
19.2.1.	Особенность диффузии малоинерционных частиц (лагранжево описание)	427

19.2.2. Диффузия малоинерционной примеси в эйлеровом описании . . .	429
19.2.3. Пространственные корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$	431
19.2.4. Корреляционный тензор пространственных производных $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.	432
19.2.5. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$	434
19.2.6. Об условиях применимости полученных результатов	436
19.3. Диффузия и кластеризация примеси с учетом вращения	437
19.3.1. Пространственные корреляции поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$	438
19.3.2. Временной корреляционный тензор поля $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$	440
Глава 20. Диффузия и кластеризация оседающей примеси	
в случайных потоках	443
20.1. Текущее состояние проблемы и основные уравнения	443
20.1.1. Диффузия частиц (лагранжево описание)	444
20.1.2. Эйлерово описание поля плотности примеси	445
20.2. Диффузия и кластеризация поля плотности оседающей	
безынерционной примеси	446
20.3. Учет малой инерционности оседающей примеси	452
20.3.1. Общие замечания	452
20.3.2. Диффузионное приближение	455
20.3.3. Пространственно-временной корреляционный тензор	
поля $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$	456
20.3.4. Пространственно-временной корреляционный тензор	
поля $\text{div } \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$	457
Часть VII ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ МАГНИТНОГО	
ПОЛЯ В СЛУЧАЙНЫХ МАГНИТОГИДРО-	
ДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ	461
Глава 21. Вероятностное описание магнитного поля	
в случайном поле скоростей	462
21.1. Основные особенности задачи и определяющие уравнения	462
21.2. Статистическое усреднение	464
Глава 22. Вероятностное описание энергии магнитного поля	
в случайном поле скоростей	466
22.1. Приближение дельта-коррелированного случайного поля скоростей . . .	466
22.2. Турбулентное динамо в критической ситуации	471
22.2.1. Особенности диффузии магнитного поля	
в критических ситуациях	471
22.2.2. Основные уравнения метода последовательных приближений . .	474
22.2.3. Псевдо-равновесное поле скоростей	482
22.2.4. Случайное акустическое поле скоростей	485
22.2.5. Равновесное тепловое поле скорости	488
Глава 23. Интегральные одноточечные статистические	
характеристики магнитного поля	490
23.1. Пространственная корреляционная функция магнитного поля	490
23.2. О спиральности магнитного поля	493
23.3. О диссипации энергии магнитного поля (дисперсии силы тока)	495

Часть VIII	ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В СЛОИСТО-	
	НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ	499
Глава 24.	Предварительные замечания	500
24.1.	Падение волны на слой неоднородной среды	500
24.2.	Источник внутри слоя неоднородной среды	502
Глава 25.	Статистическое описание волнового поля на границах	505
25.1.	Коэффициенты отражения и прохождения волны	505
25.1.1.	Недиссипативная среда (случай нормального падения волны)	507
25.1.2.	Недиссипативная среда (случай наклонного падения волны)	509
25.1.3.	Диссипативная среда	511
25.2.	Источник внутри среды	515
25.3.	Статистическая локализация энергии	516
25.4.	Диффузионное приближение	517
25.4.1.	Задача с несогласованной границей	517
25.4.2.	Задача с согласованной границей	518
Глава 26.	Статистическая теория переноса излучения	523
26.1.	Нормальное падение волны на слой среды	523
26.1.1.	Недиссипативная среда (стохастический волновой параметрический резонанс и динамическая локализация волн)	525
26.1.2.	Диссипативная среда	533
26.2.	Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды	536
26.2.1.	Неограниченное пространство случайно-неоднородной среды	538
26.2.2.	Полупространство случайно-неоднородной среды	539
26.2.3.	Асимптотический случай малого поглощения	542
26.3.	Особенности статистического описания акустического поля в океане	544
26.4.	Численное моделирование	548
26.4.1.	Падение волны на слой среды	550
26.4.2.	Источник плоских волн внутри среды	551
26.4.3.	Нелинейная задача о самовоздействии волны в случайной среде	555
Глава 27.	Собственные значения и собственные функции стохастических краевых задач	557
27.1.	Общие соотношения	557
27.2.	Статистическое усреднение	559
Глава 28.	Многомерные волновые задачи в слоистых случайных средах	564
28.1.	Нестационарные задачи	564
28.1.1.	Формулировка краевых волновых задач	564
28.1.2.	Статистическое описание	566
28.2.	Точечный источник в слоистой случайной среде	570
28.2.1.	Факторизация волнового уравнения в слоистых средах	570
28.2.2.	Параболическое уравнение	572
28.2.3.	Общий случай	575
Глава 29.	Двухслойная модель среды	577
29.1.	Постановка краевых задач	577
29.2.	Статистический анализ	580

Часть IX РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ	587
Глава 30. Метод стохастического уравнения	588
30.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия	588
30.2. Приближение дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды .	591
30.2.1. Оценка деполяризационных эффектов в случайно-неоднородных средах	601
30.3. Применимость приближения дельта-коррелированности	603
30.3.1. Метод последовательных приближений	603
30.3.2. Диффузионное приближение для волнового поля	606
30.4. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля	610
30.4.1. Случайный фазовый экран ($\Delta x \ll x$)	614
30.4.2. Случай непрерывной среды ($\Delta x = x$)	614
Глава 31. Геометрическая оптика в случайно-неоднородной среде	617
31.1. Диффузия лучей в случайно-неоднородной среде (лагранжево описание)	617
31.2. Возникновение каустик в случайно-неоднородной среде	620
31.3. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (эйлерово описание)	626
Глава 32. Континуальная запись решения задачи	632
32.1. Общие соотношения	632
32.2. Статистическое описание волнового поля	635
32.3. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны . .	638
32.3.1. Случайный фазовый экран	640
32.3.2. Случай непрерывной случайной среды	642
Глава 33. Каустическая структура волнового поля	648
33.1. Элементы статистической топографии случайного поля интенсивности .	648
33.1.1. Область слабых флуктуаций интенсивности	650
33.1.2. Область сильных флуктуаций интенсивности	653
Часть X Приложения, Метод погружения в краевых волновых задачах	657
Общие замечания	658
Глава А. Стационарные краевые волновые задачи	660
А.1. Одномерные стационарные краевые волновые задачи	660
А.1.1. Уравнение Гельмгольца с несогласованной границей	660
А.1.2. Уравнение Гельмгольца с согласованной границей	671
А.1.3. Акустические и электромагнитные волны в слоисто-неоднородной среде	674
А.1.4. Акустико-гравитационные волны в слоистом океане	681
А.2. Волны в периодически неоднородных средах	690
А.2.1. Падение волны на слой периодически неоднородной среды	690
А.2.2. Брэгговский резонанс в неоднородных средах	694

А.3. Краевая стационарная нелинейная одномерная задача о самовоздействии волны	696
А.3.1. Общие уравнения	696
А.3.2. Падение волны на полупространство нелинейной среды	701
А.3.3. Примеры расчета волновых полей в нелинейной среде	705
А.4. Стационарная многомерная краевая задача	712
А.4.1. Стационарная нелинейная многомерная краевая задача	719
Глава В. Одномерная нестационарная краевая волновая задача	725
В.1. Случай нестационарной среды	725
В.1.1. Падение волны на слой среды	727
В.2. Стационарная среда	729
В.2.1. Решение обратной задачи	733
В.3. Одномерная нелинейная волновая задача	736
Список литературы	739
Предметный указатель	765