Определения по курсу «Математика 1» (не знаешь — получаешь 2).

1. **Функция.**

Определение. Пусть даны два множества X и Y. Функцией f называется любое правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие некоторый элемент множества Y.

2. **Точная верхняя (нижняя) граница.**

Определение. Число M называется верхней границей множества A, если

$$\forall x \in A: \ x \leqslant M.$$

Определение. Число называется точной верхней границей множества A, если оно является наименьшей из верхних границ:

$$\sup A = \min M,$$

где M — верхняя граница множества A.

Точная верхняя граница называется «supremum» («супрэ́мум»).

Определение. Число m называется нижней границей множества A, если

$$\forall x \in A: \ x \geqslant m.$$

Определение. Число называется точной нижней границей множества A, если оно является наибольшей из нижних границ:

$$\inf A = \max m,$$

где m — нижняя граница множества A.

Точная нижняя граница называется «infimum» («и́нфимум»).

3. **Определение предела (в том числе на бесконечности и (или) равного бесконечности).**

Определение предела. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ (называется "э́псилон") существует δ ("дельта"), зависящая от ε и бо́льшая нуля, такая что для любого $x \in X$, такого что $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Примеры определения предела для бесконечных случаев **см. в лекциях.**

4. **Бесконечно малые функции.**

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ по отношению к функции $g(x)$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой (т.е. бесконечно малой по отношению к функции, тождественно равной единице) при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

5. **Бесконечно большие функции.**

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ по отношению к функции $g(x)$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

6. **Эквивалентные функции.**

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначение: $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

7. **Функции одного порядка.**

Определение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются функциями одного порядка при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = M$, где $M \neq 0$ и $M \neq \infty$.

8. **Предел на языке последовательностей.**

Определение (предел последовательности). Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число N, зависящее от ε, такое что для любого натурального числа n, для которого выполняется неравенство $n > N$, будет также выполняться неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Определение (предел функции на языке последовательностей). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, такой что $x_n \neq a$ при всех n, и последовательность x_n стремится к a при $n \to +\infty$, следует, что и последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ стремится к A при $n \to +\infty$.

9. **Непрерывная функция.**

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такая что для любого x, удовлетворяющего условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в любой точке x_0 множества X.

10. **Производная.**

Определение. Предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

если он существует, называется производной $f'(x)$.

11. **Дифференцируемая функция и дифференциал.**

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что ее приращение в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \beta(x_0, \Delta x),$$

где $A = A(x_0)$ — это некое число,
а $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\beta(x_0,\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Тогда функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, выражение $A \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0. (Другими словами: дифференциал функции — это линейная часть приращения функции).

12. **Определение касательной и ее уравнение.**

Определение. Пусть на кривой выбраны точка M и точка M_1, а также проведена прямая (секущая) MM_1. Если перемещать точку M_1 вдоль по кривой, то прямая MM_1 будет вращаться вокруг точки M. Касательной к кривой в точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1 вдоль по кривой стремится к совпадению с M.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$.

13. **Правило Лопиталя.**

Теорема (Правило Лопиталя). Пусть выполнены следующие условия.

1) Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки a. 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, где число A может быть нулем или бесконечностью. 3) Существуют конечные производные $f'(a)$ и $g'(a)$, причем $g'(a) \neq 0$ (если $a = \infty$, то $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$).

Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

14. **Определение экстремума.**

Определение. Точкой максимума функции $f(x)$ называется значение аргумента x_0, для которого существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого x из промежутка $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x_0) > f(x)$. Значение функции в точке максимума называется максимальным значением.

Все вместе обозначается словами "функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0."

Определение. Точкой минимума функции $f(x)$ называется значение аргумента x_0, для которого существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого x из промежутка $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ выполнено неравенство $f(x_0) < f(x)$. Значение функции в точке минимума называется минимальным значением.

Все вместе обозначается словами "функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0."

Определение. Экстремумом (точкой экстремума) функции называется точка, которая является или точкой максимума, или точкой минимума.

15. **Теорема Ферма.**

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума).
Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и во **внутренней** *точке $c \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение (т.е. имеет экстремум). Тогда если функция $f(x)$ имеет производную в точке c, то $f'(c) = 0$.*

16. **Теорема Ролля.**

Теорема Ролля. *Пусть выполнены следующие условия. 1) Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$. 2) Функция $f(x)$ имеет конечную производную на (a, b). 3) Выполнено равенство $f(a) = f(b)$.*

Тогда существует, по крайней мере, одной число $c \in (a, b)$, такое что

$$f'(c) = 0.$$

17. **Теорема Лагранжа.**

Теорема Лагранжа. *Пусть выполнены следующие условия. 1) Функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$. 2) Функция $f(x)$ имеет конечную производную на (a, b).*

Тогда существует $c \in (a, b)$, такая что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

18. **Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

19. **Таблица эквивалентных функций.**

Таблица эквивалентных пар.

1. $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u.$
2. $\operatorname{tg} u \underset{u\to 0}{\sim} u.$
3. $\arcsin u \underset{u\to 0}{\sim} u.$
4. $\operatorname{arctg} u \underset{u\to 0}{\sim} u.$
5. $1 - \cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}.$
6. $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u.$
7. $a^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u \ln a.$
8. $(1 + u)^\mu - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \mu u.$
9. $\ln(1 + u) \underset{u\to 0}{\sim} u.$
10. $u^\mu - 1 \underset{u\to 1}{\sim} \mu(u - 1).$
11. $\ln u \underset{u\to 1}{\sim} u - 1.$
12. $u^v \underset{\substack{v\to\infty\\ u\to 1}}{\sim} e^{v(u-1)}.$

20. **Таблица производных.**

Свойства производной

Подразумевается, что U, V — функции от переменной x; с другой стороны, C — произвольное число.

1. $C' = 0.$
2. $x' = 1.$
3. $(CU)' = C \cdot U'.$
4. $(U + V)' = U' + V'.$
5. $(U - V)' = U' - V'.$
6. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'.$
7. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$
8. $\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}.$

Таблица производных.

В таблице подразумевается, что a — число, но $U = U(x)$, т.е. является функцией от x.

1. $(U^a)' = a \cdot U^{a-1} \cdot U'.$
2. $(\ln U)' = \frac{1}{U} \cdot U'.$
3. $(\sin U)' = \cos(U) \cdot U'.$
4. $(\cos U)' = -\sin(U) \cdot U'.$
5. $(\operatorname{tg} U)' = \frac{1}{\cos^2 U} \cdot U'.$
6. $(\operatorname{ctg} U)' = -\frac{1}{\sin^2 U} \cdot U'.$
7. $(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1 - U^2}} \cdot U'.$
8. $(\arccos U)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - U^2}} \cdot U'.$
9. $(\operatorname{arctg} U)' = \frac{1}{1 + U^2} \cdot U'.$
10. $(\operatorname{arcctg} U)' = -\frac{1}{1 + U^2} \cdot U'.$
11. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln a \cdot U'.$
12. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'.$
13. $(\log_a(U))' = \frac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'.$
14. $\left(U^V\right)' = U^V \left(\frac{V}{U} \cdot U' + \ln U \cdot V'\right).$

21. **Только на 5: Формула Тейлора для элементарных функций (6 штук)**.