Решим уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (4 - \frac{22^2}{x^2})y = 0.$$

Напоминание (см. Lecture 7): Дифференциальное уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0$$

называется *уравнением Бесселя порядка ν*. Решения уравнения Бесселя, ограниченные при $x = 0$, называются *функциями Бесселя первого рода* $J_\nu(x)$. Функции Бесселя второго рода (*функции Неймана*) — решения $Y_\nu(x)$ уравнения Бесселя, бесконечные в точке $x = 0$.

Таким образом, общее решение уравнения Бесселя порядка ν может быть записано в виде

$$y = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x).$$

Сведем наше уравнение к уравнению Бесселя.

- домножим на x^2:

$$x^2y'' + xy' + (4x^2 - 22^2)y = 0;$$

- сделаем замену $t = 2x$:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2\frac{dy}{dt} = 2y'_t; \qquad y''_{xx} = \frac{dy'_x}{dx} = 2\frac{dy'_t}{dt} = 4\frac{d^2y}{dt^2};$$

  подставляем в уравнение:

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 4y''_{tt} + \frac{t}{2}2y'_t + (t^2 - 22^2)y = 0;$$

- Общее решение полученного уравнения

$$y(t) = C_1J_{22}(t) + C_2Y_{22}(t).$$

  Ответ:

$$y(x) = C_1J_{22}(2x) + C_2Y_{22}(2x).$$